Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Самарской области
«Сызранский медико-гуманитарный колледж»

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
по теме: «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»
для обучающихся 1 курса специальности 34.02.01 Сестринское дело,
31.02.04 Лечебное дело

Сызрань,2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая тетрадь по организации самостоятельной работы обучающихся по учебному предмету Математика по теме: «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» разработана для обеспечения выполнения требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, Федеральных государственных стандартов среднего профессионального образования и является частью программ подготовки специалистов среднего звена.

Рабочая тетрадь содержит краткий справочный и пояснительный материал по разделу «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции», необходимый для решения практических заданий, а также основные типы задач, методика и образцы их решения. Предложены типовые задания для самостоятельной работы.

В процессе выполнения заданий у обучающихся целенаправленно формируются универсальные учебные действия, которые в свою очередь обеспечивают преемственность формирования общих компетенций ФГОС СПО.

Представленные в рабочей тетради задания направлены на закрепление теоретических знаний по теме «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции», а также для овладения обучающимися умений и навыков применения полученных знаний при выполнении самостоятельной работы: измерение углов; вращательное движение; техника вычислений, определения углов; простейшие свойства тригонометрических функций; формулы приведения; значения тригонометрических функций; решение простейших тригонометрических уравнений, преобразование графиков функций, практическое применение.

Рабочая тетрадь обеспечивают формирование необходимых знаний, умений навыков, общих компетенций, способствует готовности обучающихся применять полученные навыки в профессиональной деятельности.

В рамках программы ОУП. 03 Математика обучающимися осваиваются личностные, метапредметные и предметные результаты в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования: личностные (ЛР), метапредметные (МР), предметные для углубленного уровня изучения (ПР б + Пр у):

Личностные результаты воспитания (ЛР ВР)	
ЛР ВР 1	Осознающий себя гражданином и защитником великой страны
ЛР ВР 2.1	Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости
ЛР ВР 15	Стремящийся к саморазвитию и самосовершенствованию, мотивированный к обучению, к социальной и профессиональной

	мобильности на основе выстраивания жизненной и профессиональной траектории.
Предметные результаты углубленный уровень (ПР б + ПР у)	
ПРб 03	владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
ПРб 04	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
ПРб 05	сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методахматематического анализа

В целях подготовки обучающихся к будущей профессиональной деятельности при изучении учебного предметаОУП. 03 «Математика» закладывается основа для формирования ПК в рамках реализации ООП СПО по специальности 34.02.01 Сестринское дело

Коды ПК	**Наименование ПК (в соответствии с ФГОС СПО по специальности 34.02.01 Сестринское дело)**
ОП.02 Анатомия и физиология человека	
ПК 3.1.	Консультировать население по вопросам профилактики заболеваний
ПК 3.2.	Пропагандировать здоровый образ жизни
ПМ 03. Проведение мероприятий по профилактике неинфекционных и инфекционных заболеваний, формированию здорового образа жизни	
МДК 03.01 Здоровый образ жизни и профилактика заболеваний в разные возрастные периоды	
ПК 3.1.	Консультировать население по вопросам профилактики заболеваний
ПК 3.2.	Пропагандировать здоровый образ жизни

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия возникла как аппарат для вычисления неизвестных параметров треугольника по заданным значениям других его параметров. Так, методами тригонометрии по данным сторонам треугольника можно вычислить его углы, по известной площади и двум углам вычислить стороны и т.д. Необходимость отыскивать неизвестные параметры данного треугольника впервые возникла в астрономии, и в течение долгого времени тригонометрия была одним из ее разделов.

Первые методы нахождения неизвестных параметров данного треугольника были развиты учеными Древней Греции за несколько веков до нашей эры. Греческие астрономы не рассматривали синусов, косинусов и тангенсов. Вместо таблиц этих величин они составили и использовали таблицы, позволяющие отыскивать хорду окружности по стягиваемой ею дуге. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в средние века в работах индийских и арабских ученых. Современные буквенные обозначения появились в тригонометрии в середине XVIII века. Приблизительно в то же время в тригонометрии стала рассматриваться радианная мера угла, были введены тригонометрические и обратные тригонометрические функции числового аргумента, после чего тригонометрия приобрела свой современный вид.

Материал, представленный в рабочей тетради, научит обучающихся решать простейшие тригонометрические уравнения. Разделы рабочей тетради содержат краткую теоретическую часть, справочный материал, разбор решений примеров и самостоятельные задания: работа с тригонометрическим кругом, тригонометрическими функциями, а также решение простейших тригонометрических уравнений.

В рабочей тетради описывается применение тригонометрии в различных областях, в том числе и в медицине. В практической части предложено обучающимся выполнить расчеты и построить графики биоритмов.

1. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Тема 1.1Радианная мера угла. Вращательное движение

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

– Понятие тригонометрической окружности;

– Поворот точки вокруг начала координат;

Длина дуги окружности и площадь кругового сектора.

Окружность– это замкнутая линия, все точки которой равноудалены от центра.

Радиус окружности– отрезок, соединяющий её центр с любой лежащей на окружности точкой.

Круг– часть плоскости, ограниченная окружностью.

Дуга окружности– кривая линия, лежащая на окружности и ограниченная двумя точками.

Круговой сектор– часть круга, ограниченная двумя радиусами.

Угол в 1 радиан– центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности.

Рассмотрим окружность радиуса, равному 1 единичному отрезку, в прямоугольной системе координат xOy с центром в начале координат. Такую окружность называют *единичной* или *тригонометрической*. (рис.1)

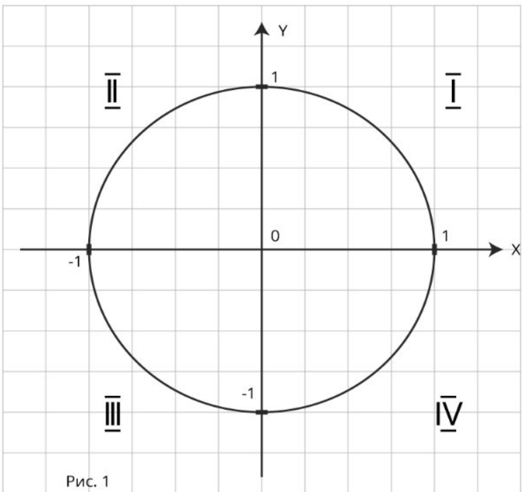


Рисунок 1 - Единичная тригонометрическая окружность

Длина этой окружности$l=2\pi R$. А учитывая, что R=1,$l=2\pi$, осями координат она поделена на четыре дуги, которые находятся соответственно в I, II, III и IV координатных четвертях. Вычислите длину каждой дуги.

Ответ. длина каждой дуги равна $\frac{1}{4}$ части окружности или $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Длина полуокружности равна π. А так как образовался развернутый угол, то π=180°.

Рассмотрим дугу, равную по длине радиусу единичной окружности. Полученный центральный угол POM равен длине дуги MP=R.

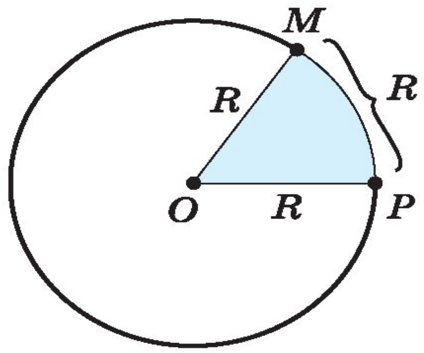


Рисунок 3-Угол в 1 радиан

Определение. Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности. Обозначается ***1рад.***

$$1\text{рад} = \frac{180°}{\pi};$$

Угол, равный α рад , вычисляется по формуле:

$$\alpha\ \text{рад}=(180/\pi\ \alpha)° \quad (1)$$

Пример 1.

Найти градусную меру угла, равного $\frac{2\pi}{3}$ рад.

Решение: Используя формулу (1),

находим $\frac{2\pi}{3}\text{рад} = (\frac{180}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3}) = 120$

Так как $180 = \pi$, то $1 = \frac{\pi}{180}$ рад, тогда $\alpha° = \frac{\pi}{180°}\alpha\ \text{рад}$(2)

Ответ: $120°$.

Пример 2. Найти радианную меру угла, равного 60 º; 20º.

Решение:Вычисляем по формуле (2): $60° = \frac{\pi}{180°}\cdot 60° = \frac{\pi}{3}$ рад.

$20° = \frac{\pi}{180°}\cdot 20° = \frac{\pi}{9}$ рад.

При обозначении мер угла, наименование «рад» опускают.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$ рад, $\frac{\pi}{9}$ рад.

Длину дуги *l* окружности радиуса R (рис.4)

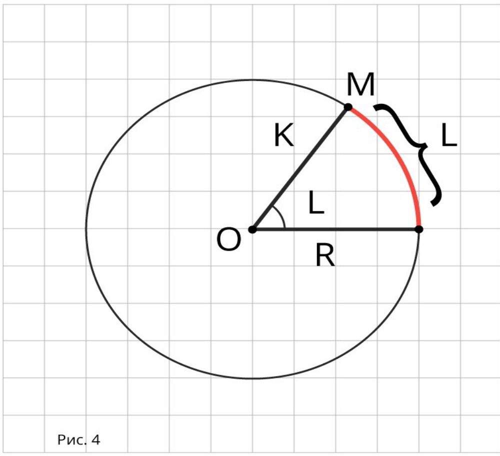


Рисунок 4- Длина дуги окружности

Длина дуги окружности можно вычислять по формуле:

$$l = \alpha R \quad (3)$$

Пример 3. Найти длину дуги окружности радиуса 6 см, если её радианная мера $\frac{3\pi}{4}$.

Решение: Используя формулу (3), получим:

$$l = \alpha R = 6\frac{3\pi}{4} = 4{,}5\pi \text{ (см)}$$

Ответ: 4,5 π (см)

Площадь S кругового сектора радиуса R и дугой α рад (рис.5)

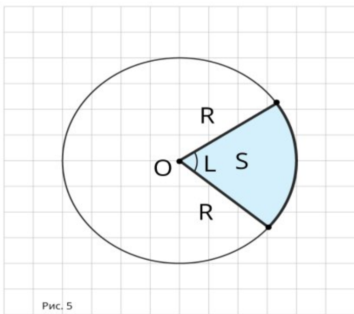


Рисунок 5- площадь кругового сектора

Площадь кругового сектора находят по формуле:

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } \alpha \in (0;\pi) \quad (4)$$

Вернёмся к единичной окружности в координатной плоскости.

Каждая точка этой окружности будет иметь координаты x и y такие, что выполняются неравенства **-1≤ x ≤ 1; -1≤ y ≤ 1.**

Понятие поворота точки

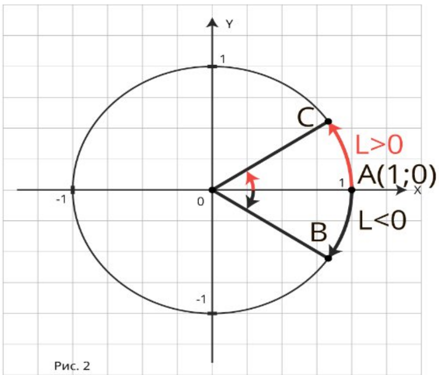
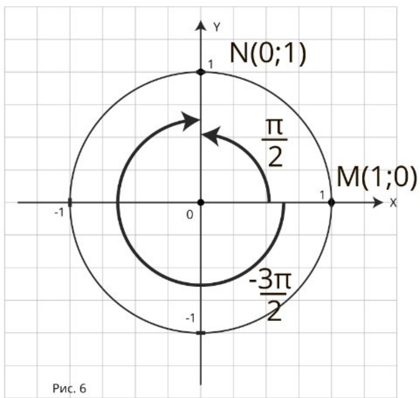


Рисунок 6- Поворот точки по единичной окружности

1. Пусть $\alpha > 0$. Тогда точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности против часовой стрелки. Она пройдёт путь α рад от точки A(1;0) до точки B. Говорят, точка B получена из точки A поворотом на угол α.
2. Пусть $\alpha < 0$. Тогда точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности по часовой стрелки . Она пройдёт путь α рад от точки A(1;0)до точки C. Говорят, точка C получена из точки A поворотом на угол - α.

При повороте на 0 рад. точка остаётся на месте.

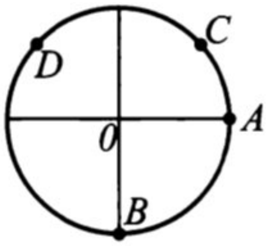
Давайте рассмотрим такой пример: при повороте точки M(1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$ получается точка N (0;1). В эту же точку можно попасть из точки M(1;0) при повороте наугол $-\frac{3\pi}{2}$



Задания для самостоятельной работы по теме Числовая окружность

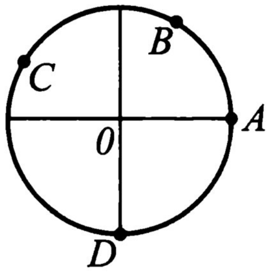
Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует:

1. Числу $\frac{3\pi}{4}$



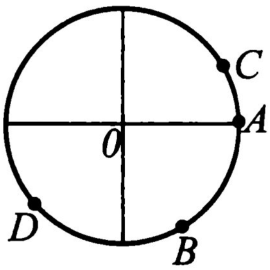
Ответ: точка________

2.Числу $\frac{5\pi}{6}$



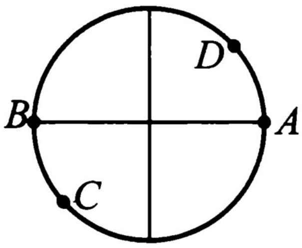
Ответ: точка________

3.Числу $\frac{\pi}{6}$



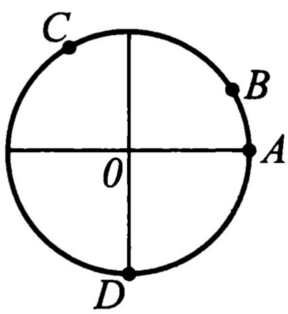
Ответ: точка________

4.Числу $-\frac{7\pi}{4}$



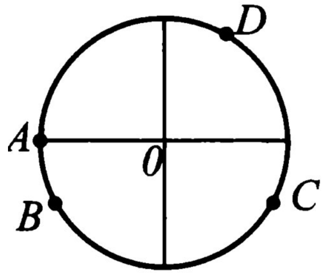
Ответ: точка________

5.Числу $-\frac{11\pi}{6}$



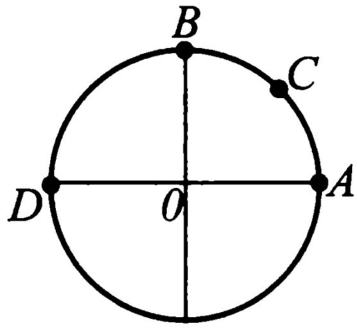
Ответ: точка________

6.Числу $\frac{\pi}{3}$



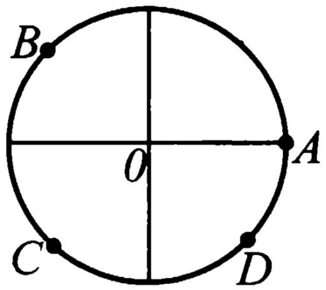
Ответ:
точка________

7.Числу $\frac{\pi}{2}$



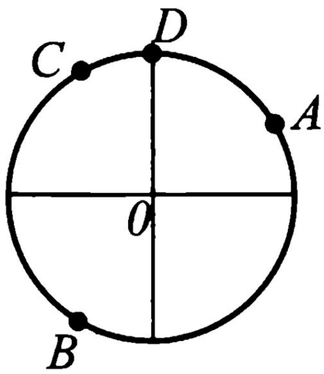
Ответ:
точка________

8.Числу $\frac{5\pi}{4}$



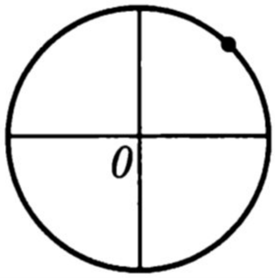
Ответ:
точка________

9.Числу $-\frac{2\pi}{3}$

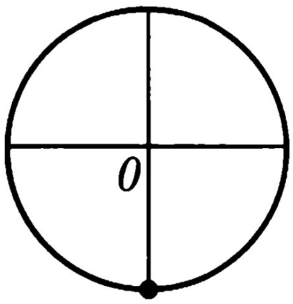


Ответ:
точка________

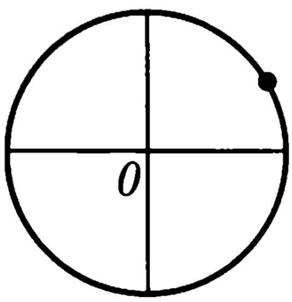
Какая из следующих точек изображена на числовой окружности?

10 

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) 2π Ответ:_

11. 

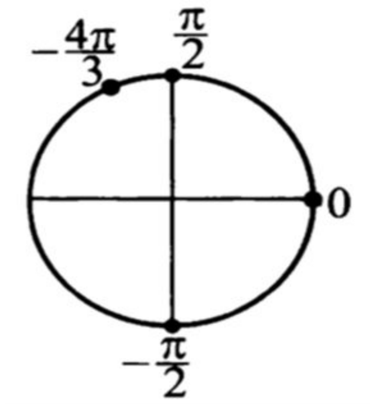
1) 2π 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{3\pi}{2}$ Ответ:__

12. 

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{6}$ 4) 2π Ответ:__

С какой из отмеченных на числовой окружности точек совпадает угол

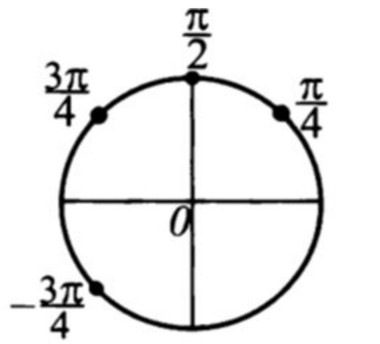
13. $\frac{2\pi}{3}$



1) 0 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $-\frac{4\pi}{3}$ 4) $-\frac{\pi}{2}$

Ответ:______

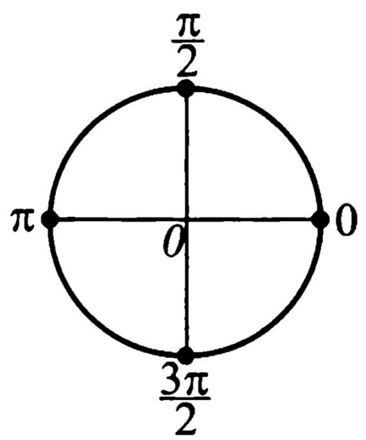
14. $\frac{5\pi}{4}$



1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{3\pi}{4}$ 4) $-\frac{3\pi}{4}$

Ответ:______

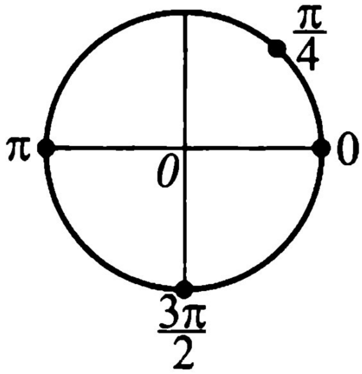
15. $\frac{7\pi}{2}$



1) 0 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{3\pi}{2}$

Ответ:______

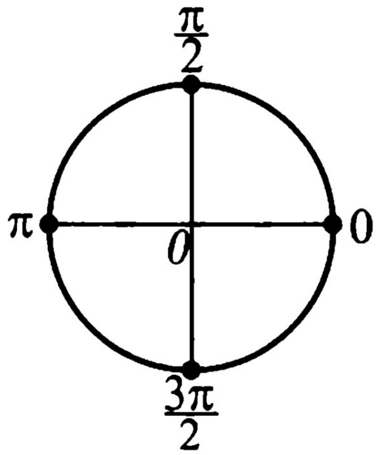
16. 3π



1) 0 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) π 4) $\frac{3\pi}{2}$

Ответ:________

17. $-\frac{\pi}{2}$

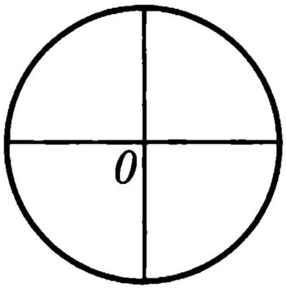


1) 0 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{3\pi}{2}$

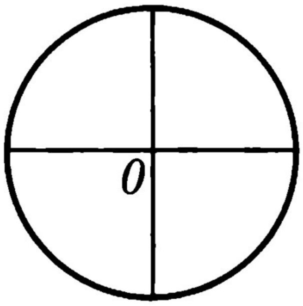
Ответ:_______

Изобразите на числовой окружности:

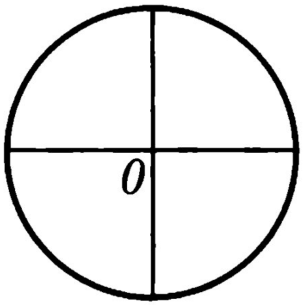
18. Точку $-\frac{2\pi}{3}$



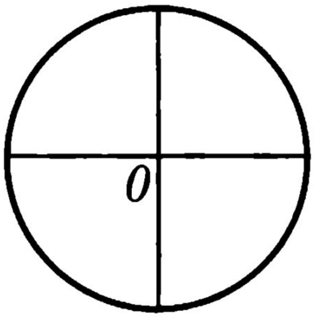
19. Точку $-\frac{4\pi}{3}$



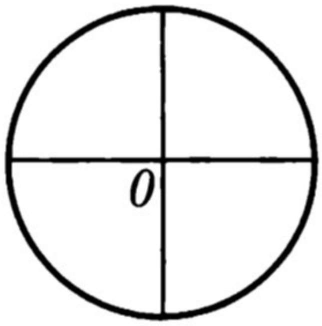
20. Точку $\frac{7\pi}{6}$



21. Точку $\frac{4\pi}{3}$



22. Точку $\frac{\pi}{4}$



Тема 1.2 Синус, косинус и тангенс числа

Обучающийся должен знать:

–определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента;

–значения тригонометрических функций некоторых аргументов;

–знаки значений тригонометрических функций по координатным четвертям;

уметь:

–вычислять простейшие тригонометрические выражения.

Синус угла α – ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол c.*Обозначается* $\sin\alpha$

Косинус угла α – абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол c.*Обозначается* $\cos\alpha$

Тангенс угла α – отношение синуса угла к его косинусу. *Обозначается tg* α

Котангенс угла α – отношение косинуса угла к его синусу. *Обозначается ctg* α

Зарождение тригонометрии относится к глубокой древности. Слово «тригонометрия» греческое: тригоно — треугольник, метрити — мера. Иными словами, тригонометрия — наука об измерении треугольников. Длительную историю имеет понятие синуса. Различные отношения отрезков треугольника и окружности встречаются уже в III в. до н. э. в работах великих математиков Древней Греции — Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского. В IV—V вв. появился специальный термин в трудах по астрономии великого индийского ученого Ариабхаты (476 — ок.550). Отрезок он назвал ардхаджива, или более кратко джива. Арабскими математиками в IX в. слово джива было заменено на арабское слово джайб (выпуклость). При переводе арабских математических текстов в XII в. это слово было заменено латинским синус (sinus — изгиб, кривизна).

Косинус — это сокращение латинского выражения complementysinus, т. е. «дополнительный синус» или иначе «синус дополнительной дуги».

Название «тангенс» происходит от латинского tanger (касаться). Tangens переводится как «касающийся» (линия тангенсов — это касательная к единичной окружности).

Несмотря на то, что тригонометрия зародилась в древние времена, сегодня она охватывает практически все естественные науки и технику.

Актуализация знаний

1.Найдите координаты точек A, B, C и D, лежащих на единичной окружности (рис. 7)

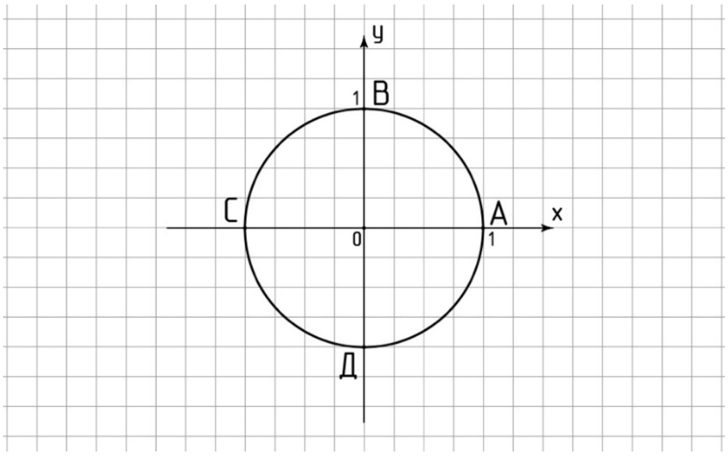


Рисунок 7 – Единичная окружность

Поставьте в соответствие точке её координаты

A (0; 1)

B (-1; 0)

C (1; 0)

D (0; -1)

Ответ: A(_;_); B(_; _); C(_; _); D(_; _)

1.Рассмотрим окружность радиуса, равного 1 единичному отрезку, в прямоугольной системе координат xOy с центром в начале координат. Такую окружность называют*единичной* или *тригонометрической*.

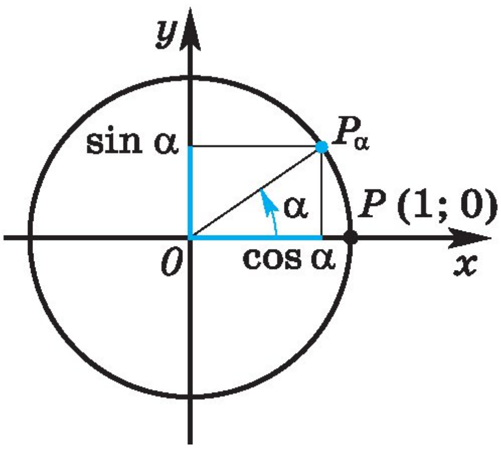


Рисунок 8 – Определение синуса, косинуса.

Точка Р (1;0) при повороте вокруг начала координат на угол α переместилась в точку Pa. Определим её координаты. (рис. 8).

Определения:

Синусом угла α **называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на уголα.**Обозначается $\sin\alpha$.

Косинусом угла α **называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.**Обозначается $\cos\alpha$Угол α может выражаться и в градусах и в радианах.

Пример 1.

Точка A(1;0) при повороте на угол 90° *или* $\frac{\pi}{2}$ *переместилась в точку* $B(0;\ 1)$. (рис. 7)

Ордината точки В равна 1, значит $\sin 90^\circ = 1$ или $\sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Абсцисса точки В равна 0, значит $\cos 90^\circ = 0$ *или* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Пример 2.

Точка А(1; 0) при повороте на угол $a= \pi$ переместилась в точкуС(-1;0). (рис.7)

Найдите sinπ и cosπ

Ответ:sinπ= 0; cosπ=-1

Пример 3.

Точка А(1; 0) при повороте на угол a=270 переместилась в точку D (0; -1)(рис. 7)

Найдите sin=270ºи cos =270º

Ответ:sin270º = - 1 cos270º=0

Рассмотрим ещё два понятия.

Определение. ***Тангенсом*** **угла** α **называется отношение синуса угла к его косинусу.**

Обозначается **tg** α

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \textit{где} \cos\alpha \neq 0$$

Пример 4.

Найти tg 0. Вычислим по формуле $\mathbf{tg}\ \mathbf{0} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0.$

Определение. ***Котангенсом*** **угла α называется отношение косинуса угла к его синусу.**

Обозначается **ctg** α

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, где \sin\alpha \neq 0$$

На единичной окружности касательная, проведенная к точке (1; 0) называется линией тангенсов. Касательная, проведенная к точке (0; 1) - линия котангенсов.

Знаки тригонометрических функцийзависят от того, в какой четверти оканчивается заданный угол.

Так как синусом называется ордината точки P_a, то синус положителен в Iи II четвертях и отрицателен в IIIи IVчетвертях.

Поскольку косинусом называется абсцисса точки P_a, косинус положителен в I и IV четвертях и отрицателен в II и III четвертях.

Так как тангенс угла есть отношение ординаты точки P_a к ее абсциссе, то тангенс положителен, когда знаки координат совпадают, и отрицателен, когда знаки координат различны. Такие же знаки имеет и котангенс. Следовательно, тангенс и котангенс положительны в I и III четвертях и отрицательны в II и IV четвертях.

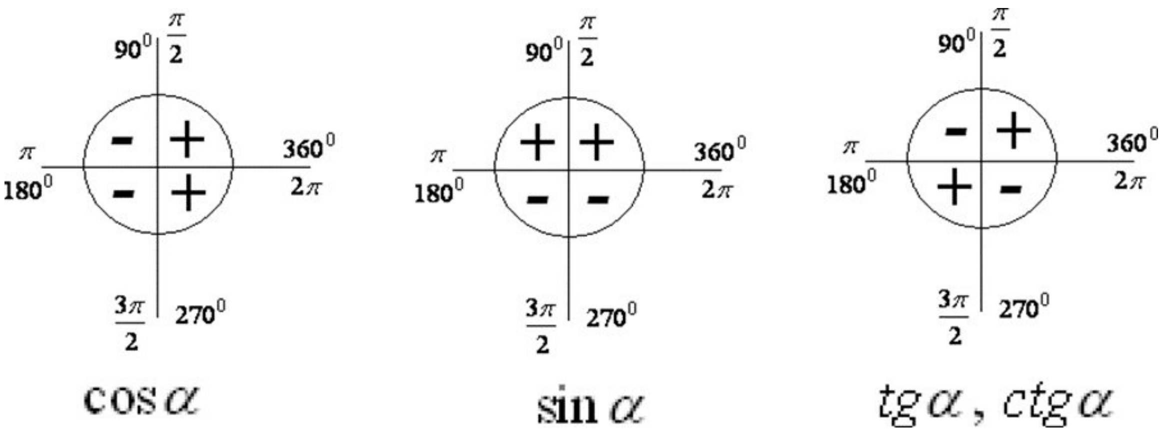


Рисунок 9-Знаки тригонометрических функций

Таблица1 - Значение тригонометрических функций

Угол	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

1.2.1Понятия периодичности, четности и нечетности функций

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число T (называемое периодом), что для всех выполняются равенства $f(x) = f(x+T)$ и $f(x) = f(x-T)$. Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно провести построение на отрезке длиной T и затем полученный график параллельно перенести на расстояние nT вправо и влево вдоль оси Ox.

Все тригонометрические функции являются периодическими. Так как при вращении точки она, сделав полный оборот или несколько полных оборотов, займет первоначальное положение, ее координаты не изменяются. Следовательно, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими и их наименьший период равен 2π (360^0), а функции $y = tgx$ и $y = ctgx$ являются периодическими и их наименьший период равен π (или 180^0).

Итак, $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ (k- целое неотрицательное число); $tg(x + \pi k) = tgx$, $ctg(x + \pi k) = ctgx$ (k- целое неотрицательное число).

Вследствие того, что значение периодических функций не меняется от прибавления к аргументу целого числа периодов, для удобства вычислений можно добавлять или отбрасывать любое целое число периодов.

Четной функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Нечетной функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Среди тригонометрических функций имеется только одна четная $y = \cos x$. Для нее справедливо равенство $\cos(-x) = \cos x$. Все остальные функции $y = \sin x$, $y = tgx$ и $y = ctgx$ являются нечетными. Для них справедливы равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $tg(-x) = -tgx$ и $ctg(-x) = -ctgx$.

Меру угла α (в радианах) можно рассматривать как действительное число, поэтому $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ – это числовые выражения. А так как каждая точка единичной окружности имеет координаты х и у такие, что выполняются неравенства **-1 ≤ x ≤ 1; -1 ≤ y ≤ 1,** то синус и косинус не могут превышать значения, больше $|1|$.

Периодичность тригонометрических функций

Период косинуса равен 2π: $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$

Период синуса равен 2π: $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$

Период тангенса равен π: $tg(\alpha + \pi n) = tg\,\alpha$

Период котангенса равен π: $ctg(\alpha + \pi n) = ctg\,\alpha$

Четность и нечетность тригонометрических функций.

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$, $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Задания для самостоятельной работы по теме: Синус и косинус

Вычислите:

1. $\sin\frac{\pi}{4}$ Ответ:_
2. $\cos\frac{\pi}{4}$ Ответ:____
3. $\sin\frac{\pi}{6}$ Ответ:____
4. $\sin\frac{\pi}{3}$ Ответ:___
5. $\cos\frac{\pi}{6}$ Ответ:___
6. $\cos\frac{\pi}{2}$ Ответ:____

Используя периодичность синуса и косинуса, вычислите:

7. $\cos\frac{7\pi}{3}$ Решение: Ответ:

8. $\sin\frac{13\pi}{6}$ Решение: Ответ:

9. $\cos\frac{9\pi}{4}$ Решение: Ответ:

10. $\cos\frac{11\pi}{6}$ Решение: Ответ:

11. $\sin\frac{7\pi}{3}$ Решение: Ответ:

12. $\sin\frac{11\pi}{6}$ Решение: Ответ:

Используя сведения о четности тригонометрических функций, вычислите:

13. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Решение: Ответ:

14. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Решение: Ответ:

15. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ Решение: Ответ:

16. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ Решение: Ответ:

17. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ Решение: Ответ:

1.3 Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют ***основные тригонометрические тождества***:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1;$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для остальных формул являются ***формулы сложения***:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}.$$

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$
$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},$$
$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos2t=1-2\sin^2t$ и $\cos2t=2\cos^2t-1$ значение $t=\frac{\alpha}{2}$, получаем формулы ***половинного аргумента***:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ получаем формулу

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 5.

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha=-0,8$ и $\pi<\alpha<1,5\pi$.

Решение: используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, тогда $\cos^2\alpha=1-(-0,8)^2=1-0,64=0,36$.

Т. к. $\pi<\alpha<1,5\pi$ (III координатная четверть), то $\cos\alpha=-0,6$.

По формуле $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $\mathrm{tg}\alpha = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$ вычисляем $\mathrm{ctg}\alpha=1\ \frac{4}{3}. \frac{3}{4}=$:

Пример 6. Вычислите: $\sin40^0+\sin20^0$.

Решение: по формуле $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = 2\sin\frac{40^0 + 20^0}{2}\cos\frac{40^0 - 20^0}{2} = 2\sin 30^0 \cos 10^0 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}98.$$

Пример 7. Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

По формуле $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$имеем

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x.$$

36.Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

37.Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

$\cos\alpha = 0{,}4$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

38. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

39.Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

sinα=0,7и$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Вычислите:

40. Вычислите $\cos x$, если $\sin x = -0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

41. Вычислите $\sin x$, если $\cos x = -0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

42. Вычислите $\cos x$, если $\sin x = -0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

43. Вычислите $\sin x$, если $\cos x = -0{,}8$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

Используя основное тригонометрическое тождество,найдите значение выражения:

44. $3sin^2\alpha + 10 + 3cos^2\alpha$

45. $16 - 6sin^2\beta - 6cos^2\beta$

46. $10 - 3sin^2\alpha - 3cos^2\alpha$

47. $16 + 6sin^2\beta + 6cos^2\beta$

48. $5sin^2\alpha - 3$, если $cos^2\alpha = 0{,}7$

49. $2cos^2\alpha - 1$, если$sin^2\alpha = 0{,}4$

Упростите выражение:

50. sin2 ✔ ☁cos3 ✔̃ cos2 ✔ ☁sin3 ✔̃ sin ✔

51. sin2 ✔ ☁sin3 ✔̃ cos2 ✔ ☁cos3 ✔̣ cos5 ✔

Вычислите

52 $$\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$$

53 $$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}$$

1.4 Формулы приведения

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения функций любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

Сформулируем общее правило написания формул приведения:

1. Знак тригонометрической функции определяют по первоначально заданному углу.

2. Если аргумент можно представить как сумму или разность π, 2π и острого угла, то название функции не изменяют.

3. Если аргумент можно представить как сумму или разность $\pi/2$, $3\pi/2$ и острого угла, то название функции изменяют на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс).

Таблица 2- Формулы приведения

Функция	**Аргумент**			
	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Используя формулы приведения, вычислите:

18. $\sin\frac{5\pi}{4}$ Ответ:

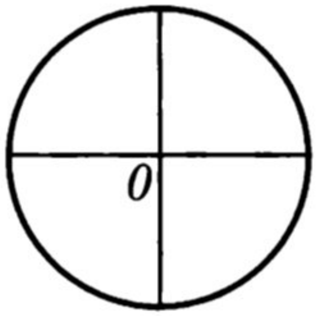
19. $\cos\frac{3\pi}{4}$ Ответ:

20. $\sin\frac{5\pi}{6}$ Ответ:

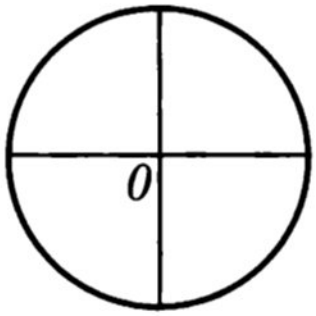
21. $\cos\frac{7\pi}{6}$ Ответ:

Вычислите, используя формулы приведения, и изобразите на единичной окружности:

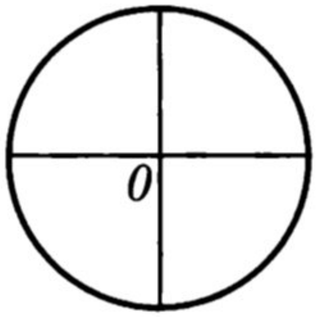
22. $\sin 780°$ Решение:



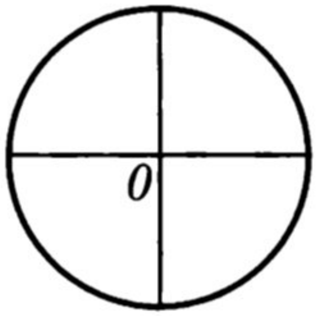
23. $\sin 1080°$ Решение:



24. $\cos 690°$. Решение:



25. $\cos 300°$ Решение:



Используя формулы приведения, упростите выражение:

26. $\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$ Решение: Ответ:

27. $\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$ Решение: Ответ:

28. $\sin(270^\circ - t)$. Решение: Ответ:

29. $\cos(3\pi - t)$ Решение: Ответ:

30. $\sin(540^\circ + t)$ Решение: Ответ:

31. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ Решение: Ответ:

32. $\mathrm{ctg}(2\pi + \alpha)$ Решение: Ответ:

33. $\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha)$ Решение: Ответ:

34. $\mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha)$ Решение: Ответ:

35. $\mathrm{ctg}(540^\circ - \alpha)$ Решение: Ответ:

1.5 Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс числа

Обратные тригонометрические функции — это арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Арксинусом числа а называется число $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $sin\varphi = a.$

Или, можно сказать, что это такой угол φ, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу а.

Арккосинусом числа а называется число $\varphi \in [0\ ;\ \pi]$, такое, что $cos\varphi = a.$

Арктангенсом числа а называется число $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $tg\ \varphi = a.$

Арккотангенсом числа а называется число $\varphi \in (0\ ;\ \pi)$, такое, что $ctg = a.$

Помните, мы уже встречались с обратными функциями**.** Например, арифметический квадратный корень из числа а — такое неотрицательное число, квадрат которого равен а.

$(\sqrt{a})^2 = a; \sqrt{a} \geq 0; a \geq 0.$

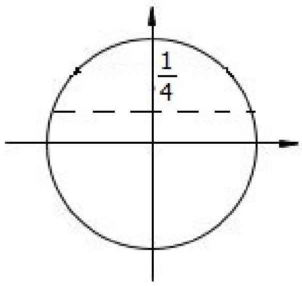
Логарифм числа b по основанию а — такое число с, что $\boldsymbol{a^c = b.}$

При этом $b>0,\ a>0,\ a \neq 1.$

Мы понимаем, для чего математикам пришлось «придумывать» новые функции. Например, решения уравнения $x^2 = 5$ — это $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}.$ Мы не смогли бы записать их без специального символа арифметического квадратного корня. Понятие логарифма оказалось необходимо, чтобы записать решения, например, такого уравнения: $2^x = 7.$ Решение этого уравнения — иррациональное число $log_2 7.$ Это показатель степени, в которую надо возвести 2, чтобы получить 7.

Так же и с тригонометрическими уравнениями. Например, мы хотим решить уравнение $sinx = \frac{1}{4}.$

Ясно, что его решения соответствуют точкам на тригонометрическом круге, ордината которых равна $\frac{1}{4}.$ И ясно, что это не табличное значение синуса. Как же записать решения?



Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен данному числу а- это арксинус.

Угол, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{1}{4}$ — это арксинус одной четвертой. И значит, серия решений нашего уравнения, соответствующая правой точке на тригонометрическом круге, — это $arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

А вторая серия решений нашего уравнения — это $\pi - arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

Осталось выяснить — зачем в определении арксинуса указывается, что это угол, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

Дело в том, что углов, синус которых равен, например, $\frac{1}{4}$, бесконечно много. Нам нужно выбрать какой-то один из них. Мы выбираем тот, который лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

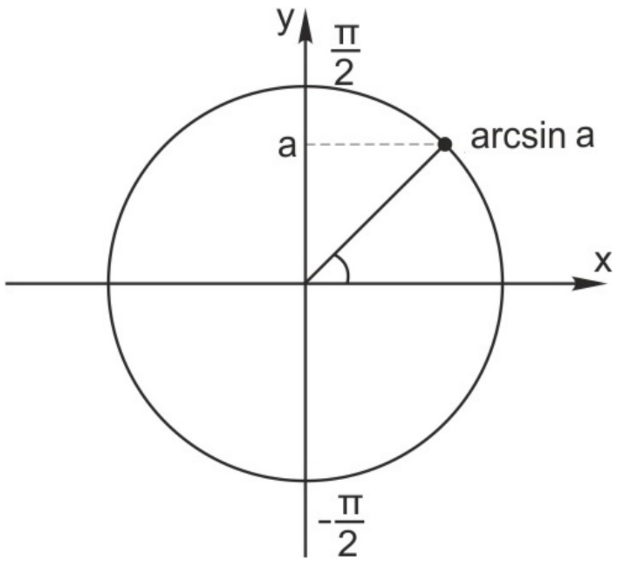
Взгляните на тригонометрический круг. Вы увидите, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ каждому углу соответствует определенное значение синуса, причем только одно.

И наоборот, любому значению синуса из отрезка $[-1;1]$ отвечает одно-единственное значение угла на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что на отрезке $[-1;1]$ можно задать функцию $y=arcsinx,$ принимающую значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Арксинусом числа а называется число $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $sin\varphi=a.$

Обозначение: $\varphi=arcsina.$ Область определения арксинуса отрезок $[-1;1].$

Область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$



Построим график функции $y = arcsinx.$

Как обычно, отмечаем значения x по горизонтальной оси, а значения y — по вертикальной.

Поскольку $x = siny$, следовательно, x лежит в пределах от -1 до 1.

Значит, областью определения функции y = arcsin x является отрезок $[-1; 1]$.

Мы сказали, что y принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что областью значений функции y = arcsin x является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что график функции y=arcsinx весь помещается в области, ограниченной линиями $x = -1;\ x = 1,\ y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

Как всегда при построении графика незнакомой функции, начнем с таблицы.

По определению, арксинус нуля — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен нулю. Что это за число? — Понятно, что это ноль.

Аналогично, арксинус единицы — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен единице. Очевидно, это $\frac{\pi}{2}$.

Продолжаем: $arcsin\frac{1}{2}$ — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{1}{2}$. Да, это $\frac{\pi}{6}$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

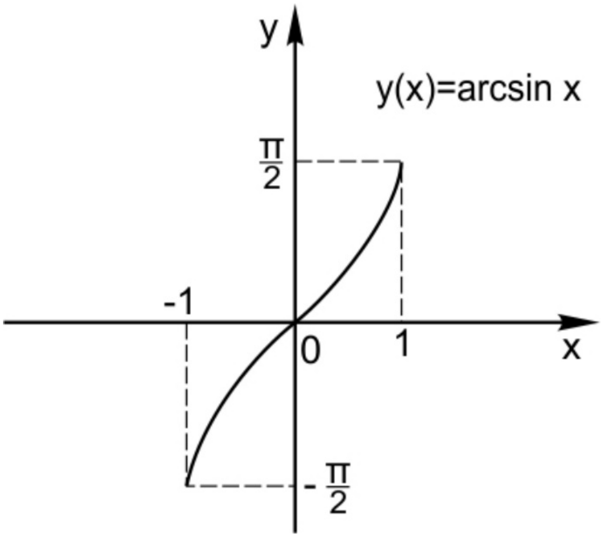


Рисунок 10 - График функции $y = arcsinx$.

Свойства функции $y = arcsinx$

1. Область определения $D(y) : x \in [-1; 1]$

2. Область значений $E(y) : y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3. $arcsin(-x) = arcsinx$, то есть эта функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = arcsinx$ монотонно возрастает. Ее наименьшее значение, равное - $\frac{\pi}{2}$, достигается при $x = -1$, а наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{2}$, при $x = 1$.

5. Что общего у графиков функций $y = sinx$ и $y = arcsinx$? Не кажется ли вам, что они «сделаны по одному шаблону» — так же, как правая ветвь функции $y = x^2$ и график функции $y = \sqrt{x}$, или как графики показательной и логарифмической функций?

Представьте себе, что мы из обычной синусоиды вырезали небольшой фрагмент от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а затем развернули его вертикально — и мы получим график арксинуса.

То, что для функции $y = sinx$ на этом промежутке — значения аргумента, то для арксинуса будут значения функции. Синус и арксинус — взаимно-обратные функции. Другие примеры пар взаимно обратных функций — это $y = x^2$ при $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$, а также показательная и логарифмическая функции. Напомним, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Аналогично, определим функцию $y = arccosx$. Только отрезок нам нужен такой, на котором каждому значению угла соответствует свое значение косинуса, а зная косинус, можно однозначно найти угол. Нам подойдет отрезок $[0; \pi]$.

Арккосинусом числа а называется число $\varphi \in [0; \pi]$**, такое, что** $cos\varphi = a$.

Легко запомнить: «арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке $[0; \pi]$.

Обозначение: $\varphi = arccosa.$ Область определения арккосинуса — отрезок $[-1; 1]$. Область значений — отрезок $[0; \pi]$.

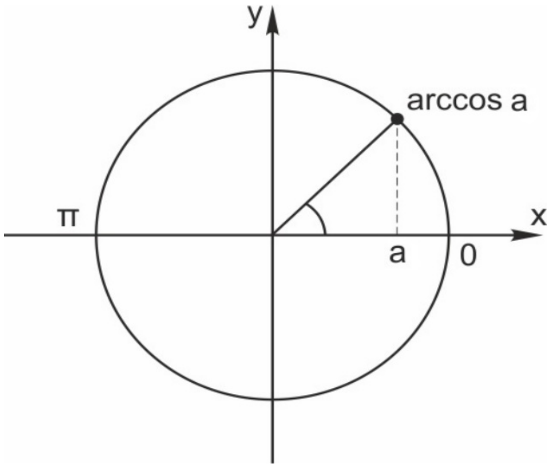


Рисунок11 - Определение арккосинуса

Очевидно, отрезок $[0; \pi]$ выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1, соответствует одно-единственное значение угла из промежутка $[0; \pi]$.

Арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией. Зато мы можем использовать следующее очевидное соотношение: $arccos(-a) = \pi - arccosa.$

Построим график функции $y = arccosx.$

Нам нужен такой участок функции $y = cosx$, на котором она монотонна, то есть принимает каждое свое значение ровно один раз.

Выберем отрезок $[0; \pi]$. На этом отрезке функция $y = cosx$ монотонно убывает, то есть соответствие между множествами $[0; \pi]$ и $[-1;\ 1]$ взаимно однозначно. Каждому значению x соответствует свое значение y. На этом отрезке существует функция, обратная к косинусу, то есть функция

y = arccosx.

Заполним таблицу, пользуясь определением арккосинуса.

Арккосинусом числа x, принадлежащего промежутку $[-1; 1]$, будет такое число y, принадлежащее промежутку $[0; \pi]$, что $x = cosy.$

Значит, $arccos1 = 0$, поскольку $cos0 = 1$;

$arccos(-1) = \pi$, так как $cos\pi = -1$;
$arccos0 = \frac{\pi}{2}$, так как $cos\frac{\pi}{2} = 0$,
$arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $cos\frac{\pi}{3} = 0$,

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$arccosx$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0

:

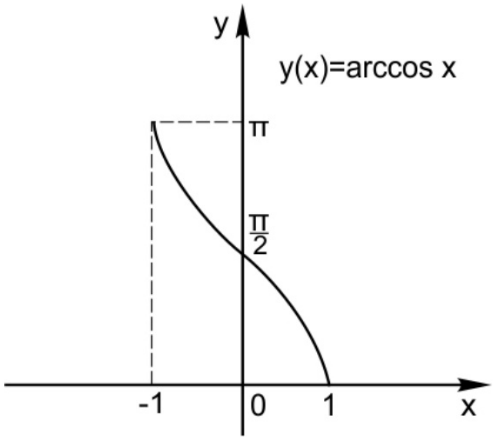


Рисунок 12- График арккосинуса

Свойства функции $y = arccosx$:

1. Область определения $D(y) : x \in [-1; 1]$
2. Область значений $E(y) : y \in [0; \pi]$
3. $arccos(-x) = \pi - \ arccosx$

Эта функция общего вида — она не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция является строго убывающей. Наибольшее значение, равное π, функция
y = arccosx принимает при $x = -1$, а наименьшее значение, равное нулю, принимает при $x = 1$.
5. Функции $y = cosx$ и $y = arccosx$ являются взаимно обратными.

Арктангенсом числа а называется число $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $tg\varphi = a$.Обозначение: $\varphi = arctga$.

Область определения арктангенса — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Область значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

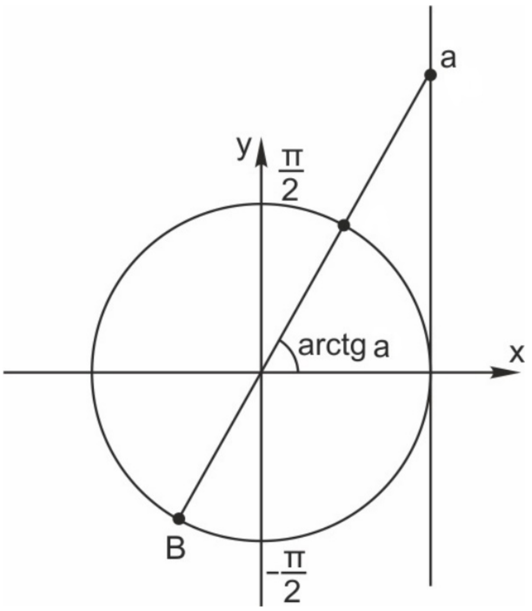


Рисунок 13-Определение арктангенса

Почему в определении арктангенса исключены концы промежутка — точки $\pm\frac{\pi}{2}$? Конечно, потому, что тангенс в этих точках не определён. Не существует числа a, равного тангенсу какого-либо из этих углов.

Построим график арктангенса. Согласно определению, арктангенсом числа x называется число y, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $tgy = x$.

Поскольку арктангенс — функция обратная тангенсу, мы поступаем следующим образом:

- Выбираем такой участок графика функции $y = tgx$, где соответствие между x и y взаимно однозначное. На этом участке функция $y = tgx$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда у обратной функции, то есть у функции $y = arctg\,x$, область, определения будет вся числовая прямая, от $-\infty$ до $+\infty$, а областью значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Дальше рассуждаем так же, как при построении графиков арксинуса и арккосинуса.

$tg0 = 0$, значит, $arctg0 = 0$

$tg\frac{\pi}{4} = 1$, значит, $arctg1 = \frac{\pi}{4}$

$tg(-\frac{\pi}{4}) = -1$, значит, $arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

А что же будет при бесконечно больших значениях x? Другими словами, как ведет себя эта функция, если x стремится к плюс бесконечности?

Мы можем задать себе вопрос: для какого числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ значение тангенса стремится к бесконечности? — Очевидно, это $\frac{\pi}{2}$.

А значит, при бесконечно больших значениях x график арктангенса приближается к горизонтальной асимптоте $y=\frac{\pi}{2}$.

Аналогично, если x стремится к минус бесконечности, график арктангенса приближается к горизонтальной асимптоте $y=-\frac{\pi}{2}$.

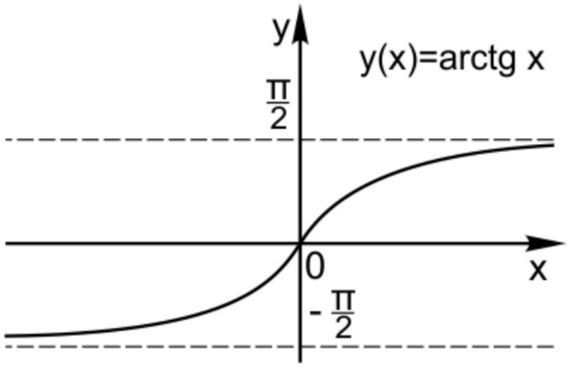


Рисунок 14 -График функции $y=arctgx$

Свойства функции $y=arctg\,x$

1. Область определения $D(y):x\in R$

2. Область значений $E(y):y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

3. Функция $y=arctg\,x$ нечетная.

4. Функция $y=arctg\,x$ является строго возрастающей.

5. Прямые $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$ — горизонтальные асимптоты данной функции.

6. Функции $y=tgx$ и $y=arctgx$ являются взаимно обратными — конечно, когда функция $y=tgx$ рассматривается на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Арккотангенсом числа a называется число $\varphi\in(0;\pi)$**, такое, что** $ctg\varphi=a$.

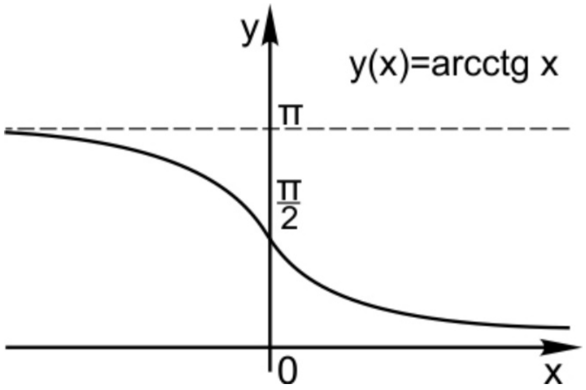


Рисунок 15- График функции $y = arcctgx$

Свойства функции $y = arctg\,x$

1. Область определения $D(y) : x \in R$
2. Область значений $E(y) : y \in (0;\pi)$
3. Функция $y = arctg\,x$ - общего вида, то есть ни четная, ни нечетная.
4. Функция $y = arctg\,x$ является строго убывающей.
5. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ - горизонтальные асимптоты данной функции.

6.Функции $y = ctgx$ и $y = arcctgx$ являются взаимно обратными, если рассматривать $y = ctgx$ на промежутке $(0;\pi)$.

1.6 Решение простейших тригонометрических уравнений

Обучающийся должен знать:

-формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

уметь:

- решать простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение cosx=a

Очевидно, что если |*a*|>1, то уравнение *cosx*=*a* не имеет решений, т.к.

$|cosx| \leq 1$ для любого x.

Пусть $|a| \leq 1$. Надо найти все такие числа x, что $cosx=a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $cosx=a$ – это число $arccos\ a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-arccosa$.

Итак, уравнение $cosx=a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения

$x=\pm arccosa$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$), т.е. формула корней уравнения $cosx=a$ имеет вид:

$$\mathbf{x=\pm arccos\ a+2\pi n,\ (n \in Z)}$$

Пример 1.

Решите уравнение: $cosx=1/2$.

Решение: по формуле $x=\pm arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Поскольку $arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $x=\pm\ \pi/3+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Пример 29.

Решите уравнение: $cosx=-0{,}2756$.

Решение: по формуле $x=\pm arccos(-0{,}2756)+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Значение $arccos(-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.

Итак, приходим к ответу $x=\pm 1{,}85+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Пример3.

Решите уравнение: $cos\ (2x-\pi/4)=1/2$.

Решение: по формуле

$2x-\pi/4=\pm arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Поскольку $arccos(1/2)=\pi/3$ получаем

$2x-\pi/4=\pm\ \pi/3+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$)

$2x=\pi/4\pm\ \pi/3+2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8\pm\pi/6+\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Уравнение sinx=a

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $sinx=a$ не имеет решений, т.к. $|sinx| \leq 1$ для любого x.

При $|a| \leq 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $sinx=a$ имеет одно решение $x_1=arcsina$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число x_2=π-*arcsina*, т.к. $sinx_2$=*sin* (π-t_1)=$sinx_1$=*a*.

Кроме того, поскольку -π/2≤x_1≤π/2,

имеем -π/2≤-x_1≤π/2

и π-π/2≤π-x_1≤π+π/2,

т.е. π/2≤t_2≤3π/2, t_2Є[π/2; 3π/2].

Итак, уравнение *sinx=a* на отрезке [π/2; 3π/2] имеет два решения x_1=*arcsina* и x_2=π-*arcsina* (совпадающие при *a*=1).

Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения *sint=a*:

$$\mathbf{x=(-1)^k arcsin\ a+\pi k,\ k \in Z.}$$

Пример 4.

Решите уравнение: *sinx*=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: по формуле *t*=$(-1)^k$*arcsin* ($\frac{\sqrt{2}}{2}$)+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Поскольку *arcsin*($\frac{\sqrt{2}}{2}$)=π/4 приходим к ответу *x*=$(-1)^k$ π/4+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Пример 5.

Решите уравнение: *sinx*=0,3714.

Решение: по формуле *x*=$(-1)^k$*arcsin*(0,3714)+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Значение *arcsin*(0,3714) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.

Итак, приходим *x*= $(-1)^k$0,3805+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Пример 6.

Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: функция синус нечетная, поэтому $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=-sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, (*k* Є ***Z***).

Т.к. $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$, (*k* Є ***Z***)

или

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{10} + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x = \frac{\pi}{5} + (-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k,\ (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Уравнение tgx=a

При любом *a* на интервале (-π/2; π/2) существует одно число *t* , что *tgt*=*a*, – это *arctga*. Поэтому уравнение *tgx=a* имеет на интервале (-π/2; π/2) длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения *tgt*=*a* отличаются от найденного на π*n*, (*n* Є ***Z***), т.е.

x=arctg a+πn, (n Є Z)

Пример 7.

Решите уравнение: *tgx*=$\sqrt{3}$.
Решение:
по формуле *x*=*arctg*($\sqrt{3}$)+π*n*, (*n* Є ***Z***).
Поскольку *arctg*($\sqrt{3}$)=$\frac{\pi}{3}$ приходим к ответу *x*=$\frac{\pi}{3}$+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Пример 8.

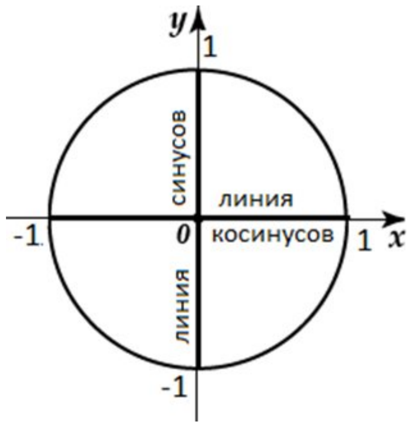
Решите уравнение: *tgx*=5,177.
Решение:
по формуле *x*=*arctg*(5,177)+π*n*, (*n* Є ***Z***).
Значение *arctg*(5,177) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.
Итак, приходим *x*=1,38+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
sin*x*=*a*	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$
cos*x*=*a*	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$
tg*x*=*a*	$x = \mathrm{arctg} a + \pi k, k \in Z$
ctg*x*=*a*	$x = \mathrm{arcctg} a + \pi k, k \in Z$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a=-1	a=0	a=1
sin$x$=a	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$
cos$x$=a	$x=\pi+2\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=2\pi k, k\in Z$
tg$x$=a	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$
ctg$x$=a	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$



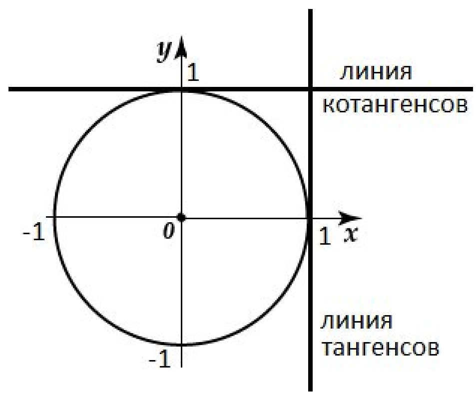


Рисунок 16- Обозначение линий синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов на единично окружности

Самостоятельная работа по решению тригонометрических уравнений

55. Решите уравнение $\sin x = 0$

56 Решите уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

57. Решите уравнение $tgx = -1$

58. Решите уравнение $ctgx = -1$

59. Решите уравнение $\sin x = 1$

60. Решите уравнение $\cos x = 0$

61. Решите уравнение $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

62. Решите уравнение $ctgx = -\sqrt{3}$

63. Решите уравнение $\sin x = -1$

64. Решите уравнение $\cos x = 1$

65. Решите уравнение $tgx = 0$

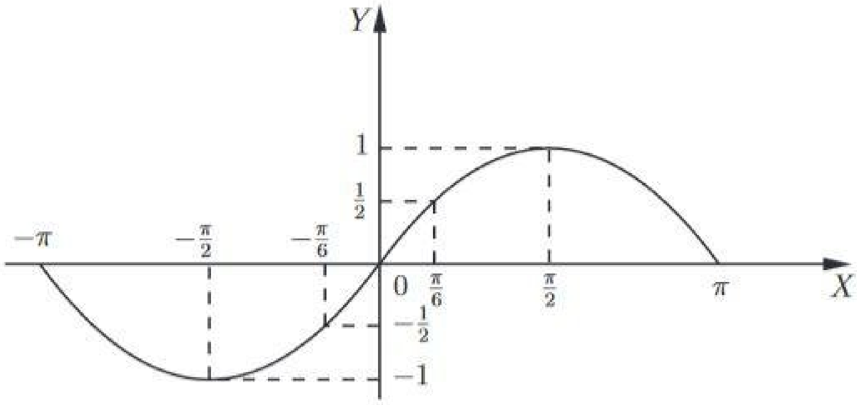
Самостоятельная работа	
Вариант 1	***Вариант 2***
1) Найдите значение выражения: $3sin^2\alpha + 10 + 3cos^2\alpha$	1) Найдите значение выражения: $16 - 6sin^2\beta - 6cos^2\beta$
2) Найдите значения выражения: $5sin^2\alpha - 3$, если $cos^2\alpha = 0{,}7$	2) Найдите значения выражения: $2cos^2\alpha - 1$, если $sin^2\alpha = 0{,}4$
3) Вычислите $\cos x$, если $\sin x = -0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	3) Вычислите $\sin x$, если $\cos x = -0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
4) Упростите выражение $cos^2t + tg^2t \cdot cos^2t$	4) Упростите выражение $sin^2t + ctg^2t \cdot sin^2t$

5) Вычислите: $\sin\frac{37\pi}{6}$	5) Вычислите: $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
Самостоятельная работа	
Вариант 3	***Вариант 4***
1) Найдите значение выражения: $10-3sin^2\alpha-3cos^2\alpha$ 2) Найдите значения выражения: $2-4sin^2\alpha$, если $cos^2\alpha=\frac{3}{4}$ 3) Вычислите $\cos x$, если $\sin x=-0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 4) Упростите выражение $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ 5) Вычислите: $\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)$	1) Найдите значение выражения: $16+6sin^2\beta+6cos^2\beta$ 2) Найдите значения выражения: $6sin^2\alpha-4$, если $cos^2\alpha=\frac{3}{4}$ 3)) Вычислите $sin\,x$, если $\cos x=-0{,}8$ и $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 4) Упростите выражение $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ 5) Вычислите: $\cos\frac{17\pi}{4}$

2. Графики тригонометрических функций

2.1 Свойства и графики тригонометрических функций

График функции $y=\sin x$



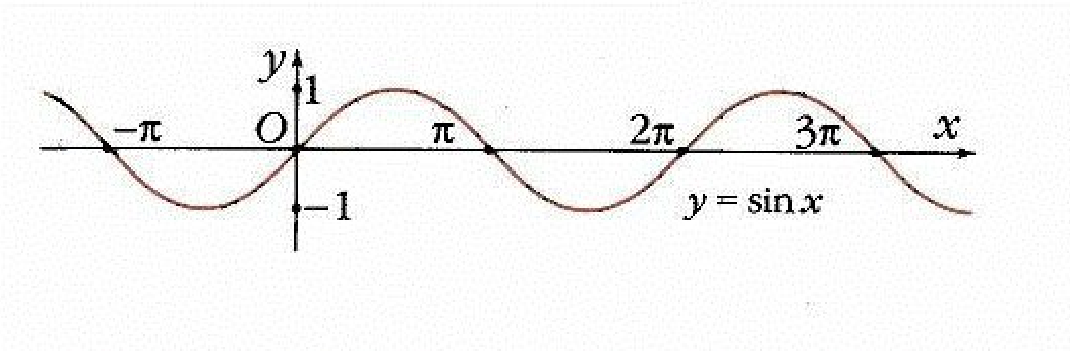


Рисунок17- График функции $y=\sin x$

График функции $\sin x$ называют синусоидой.

Свойства функции $y=\sin x$

1. Область определения – множество всех действительных чисел.
2. Область изменения (множество значений) – промежуток $[-1;1]$.
3. Функция $\sin x$ нечетная: $\sin(-x)=-\sin x$.
4. Функция $\sin x$ периодическая. Наименьший положительный период равен 2π: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
5. Нули функции: $\sin x=0$ при $x=\pi n, n\in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства: $\sin x>0$ при $x\in(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$,

   $\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n), n\in Z$.

7.Функция $\sin x$ возрастает при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$

и убывает при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$.

8.Функция $\sin x$ принимает

минимальные значения, равные -1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$,

и максимальные значения, равные 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

График функции $y = \cos x$

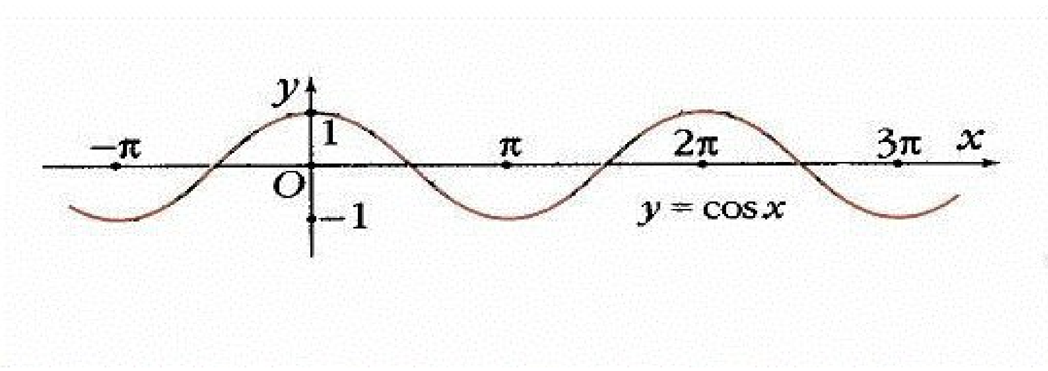


Рисунок18- График функции $y = \cos x$

График функции $\cos x$ также называют косинусоидой.

Свойства функции $y = \cos x$

1. Область определения – множество всех действительных чисел.
2. Область изменения (множество значений) – промежуток $[-1;1]$.
3. Функция $\cos x$ четная: $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция $\cos x$ периодическая. Наименьший положительный период равен 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

$$\cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z,$$

$$\cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

7. Функция $\cos x$
возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in Z$
и убывает при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in Z$.
8. Функция $\cos x$ принимает
минимальные значения, равные -1, при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$,
и максимальные значения, равные 1, при $x = 2\pi n, n \in Z$.

График функции $y = tgx$

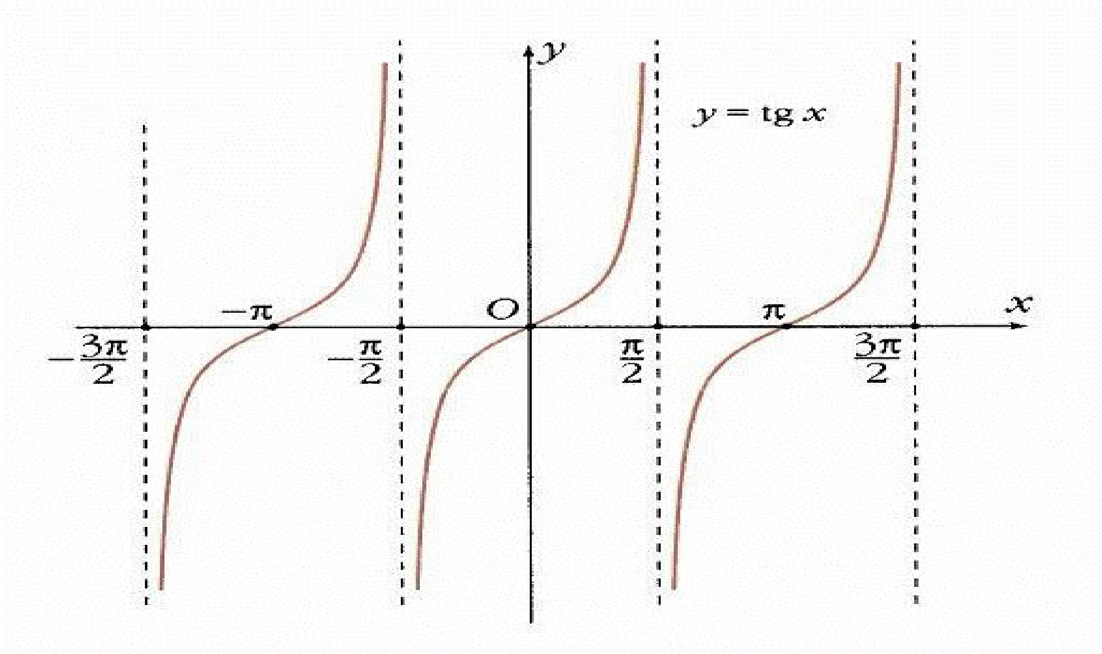


Рисунок19- График функции tgx

График функции tgx называют тангенсоидой.

Свойства функции tgx

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
2. Область изменения (множество значений) – множество всех действительных чисел.
3. Функция tgx нечетная: $tg(-x) = -tgx$.
4. Функция tgx периодическая. Наименьший положительный период равен π: $tg(x + \pi) = tgx$.
5. Нули функции: $tgx = 0$ при $x = \pi n, n \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

$$tgx > 0 \text{ при } x \in (\pi n; \pi / 2 + \pi n), n \in Z,$$
$$tgx < 0 \text{ при } x \in (-\pi / 2 + \pi n; \pi n), n \in Z.$$

7. Функция tgx возрастает в каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

График функции $y = ctgx$

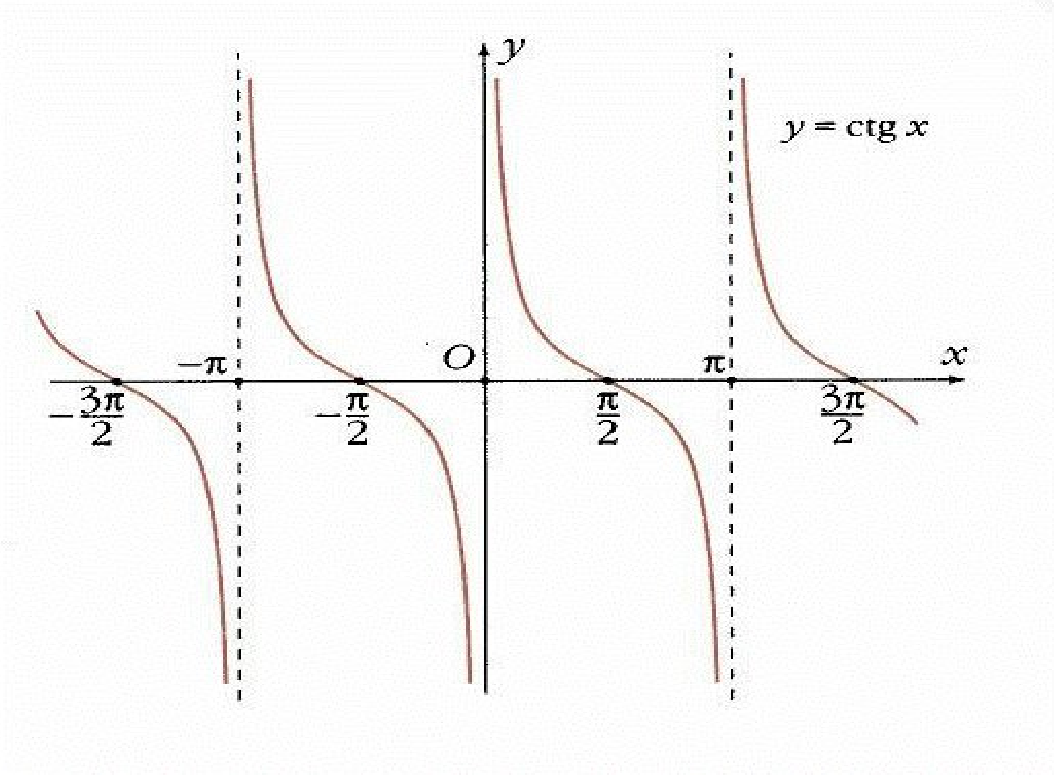


Рисунок 20- График функции $y = ctgx$

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi n, n \in Z$.
2. Область изменения (множество значений) – множество всех действительных чисел.
3. Функция $ctgx$ нечетная: $ctg(-x) = -ctgx$.
4. Функция $ctgx$ периодическая. Наименьший положительный период равен π: $ctg(x+\pi) = ctgx$.
5. Нули функции: $ctgx = 0$ при $x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

$$ctgx > 0 \text{ при } x \in (\pi n; \pi/2 + \pi n), n \in Z,$$

$$ctgx < 0 \text{ при } x \in (\pi/2 + \pi n; \pi(n+1)), n \in Z.$$

7. Функция $ctgx$ убывает в каждом из промежутков $(\pi n; \pi(n+1)), n \in Z$.

2.2 Преобразование графиков тригонометрических функций

обучающийся должен уметь преобразовывать графики тригонометрических функций.

Теоретическая основа:

1. Для построения графика функции $y=f(x)+a$, где а - постоянное число, надо перенести график $y=f(x)$ вдоль оси ординат. Если а>0, то график переносим параллельно самому себе вверх, если а < 0, то – вниз.
2. Для построения графика функции $y=kf(x)$ надо растянуть график функции $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат. Если $|k|>1$, то происходит растяжение графика вдоль оси OY, если $0<|k|<1$, то – сжатие.
3. График функции $y=f(x+b)$ получается из графика $y=f(x)$ путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс. Если b>0 , то график перемещается влево, если b<0, то – вправо.
4. Для построения графика функции $y=f(kx)$ надо растянуть график $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс. Если $|k|>1$, то происходит сжатие графика вдоль оси OX, если 0<|k|<1 , то – растяжение.

Примеры преобразования графиков функций:

1. y=sinx/3

График функции y=sinx/3 получается из графика y=sinx путем растяжения вдоль оси *Ox* в 3 раза.

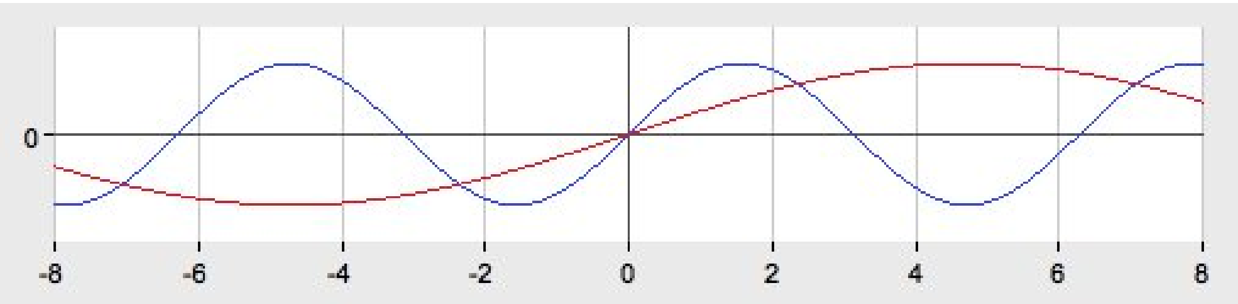
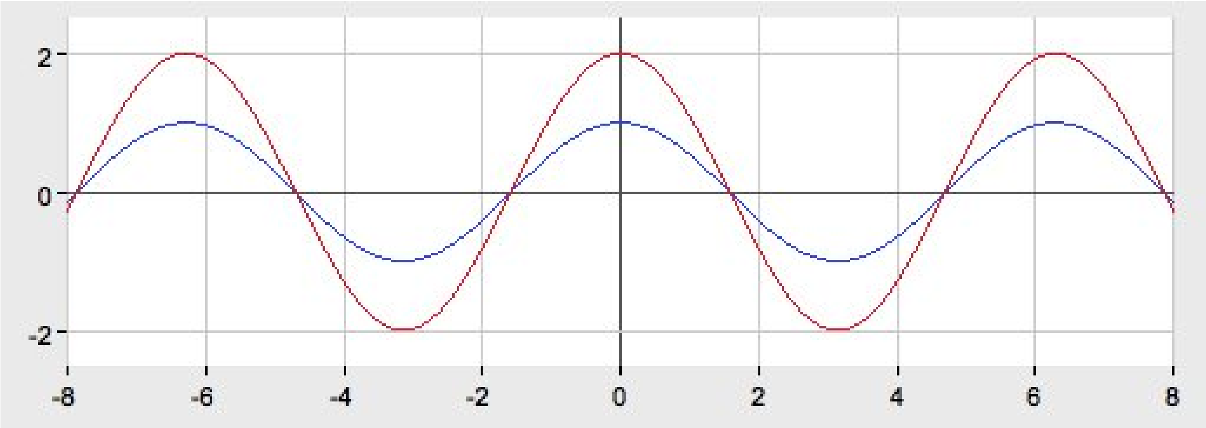


Рисунок 21- График функцииy=sinx/3

2. y=2cosx

График функции получается из графика y=2cosx путем растяжения вдоль оси *Oy* в 2 раза



.

Рисунок 22- График функцииу=2cosx

3. y=tgx+2

График функции y=tgx+2 получается из графикау=tgx путем параллельного переноса на 2 единицы вверх вдоль оси *Oy*.

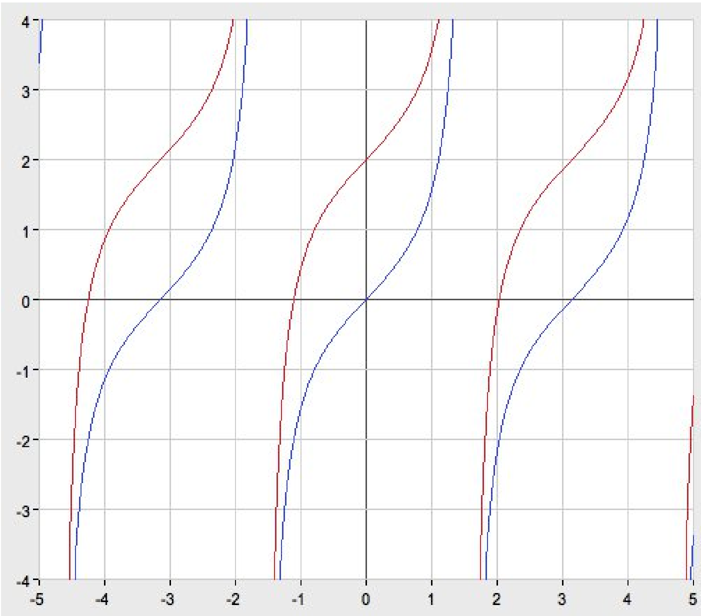


Рисунок 23- График функцииу=tgx+2

4.y=cos(x+$\frac{\pi}{2}$)

График функции получается из графика y=cos(x+$\frac{\pi}{2}$)
путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$единиц влево.

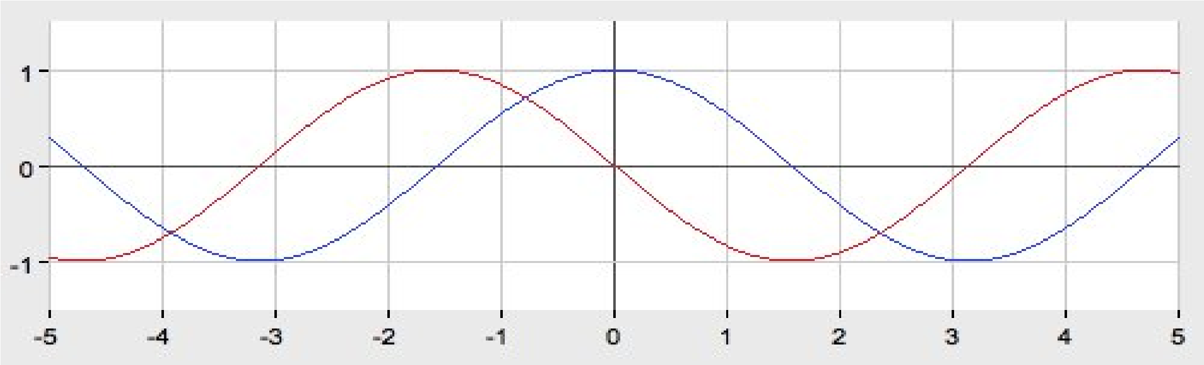


Рисунок 24- График функцииy=cos(x+$\frac{\pi}{2}$)

5. y=1/4 sinx

График функцииy=1/4sinx получается из графика y=sin x путем сжатия вдоль оси *Oy* в 4 раза.

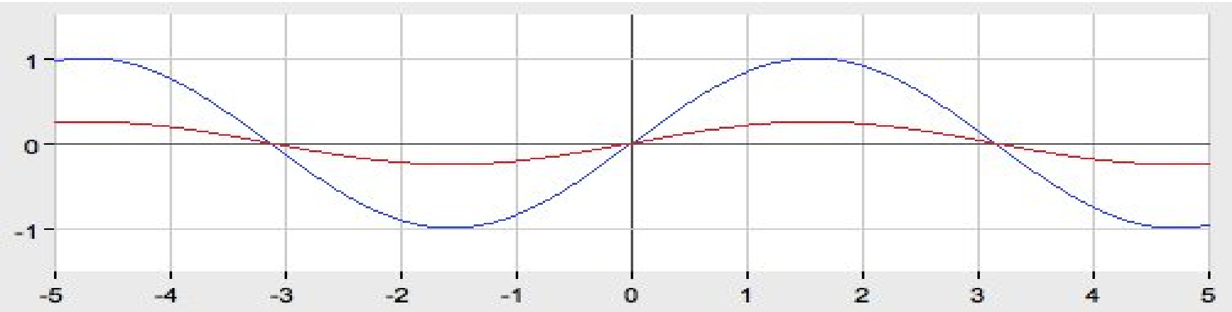


Рисунок 25 - График функцииy=1/4sinx

Задания для самостоятельной работы

Постройте графики функций:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
y= -sin x y= cosx +1 y= 2sinx y=cos(0,5x)	y= - cosx y= sinx -1 y=2cosx y= - sin2x	y= -tgx y= cosx -1 y=0,5sinx y=cos2x	y= -sinx y= sinx+1 y=0,5cosx y=sin3x

2.3 Применение тригонометрических функций

Тригонометрия находит широкое применение не только в разных разделах математики, но и других областях науки и повседневной жизни. Тригонометрия использовалась для точного определения времени суток, вычисления будущего расположения небесных светил, моментов их восхода и заката, затмений Солнца и Луны, нахождения географических координат текущего места, вычисления расстояния между городами с известными географическими координатами.

Тригонометрия – это математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами треугольников и тригонометрические функции.

В тригонометрии выделяют три вида соотношений: 1) между самими тригонометрическими функциями; 2) между элементами плоского треугольника (тригонометрия на плоскости); 3) между элементами сферического треугольника, т.е. фигуры, высекаемой на сфере тремя плоскостями, проходящими через ее центр. Тригонометрия началась именно с наиболее сложной, сферической части. Она возникла прежде всего из практических нужд. Древние наблюдали за движением небесных светил. Ученые обрабатывали данные измерений, чтобы вести календарь и правильно определять время начала сева и сбора урожая, даты религиозных праздников. По звездам вычисляли местонахождение корабля в море или направление движения каравана в пустыне. Наблюдения за звездным небом с незапамятных времен вели и астрологи. Согласно дошедшим из древности преданиям, первыми, кто попытался ввести тригонометрию в музыку это, были Пифагор и его ученики.

Инженеры используют тригонометрию, чтобы определить углы звуковых волн и спроектировать комнату или аудиторию так, чтобы волны отражались на слушателя сбалансированным и прямым образом. Продюсеры студий или менеджеры концертных залов иногда устанавливают панели, свисающие с потолка – эти панели можно отрегулировать под определенным углом, чтобы звуковые волны отражались правильно. Каждая нота (высота звука) в песне определяется размером ее синусоидальной волны, то есть определяется ее частотой. Ноты с более широкими волнами более серьезны и имеют меньше циклов в секунду, в то время как ноты с узкими синусоидальными волнами более резкие и имеют больше циклов в секунду.

Музыканты могут изменять свой тон, манипулируя производимыми синусоидальными волнами. Например, если музыкант играет ноту с частотой

512 Гц, то гармоника или парциальная составляющая генерируются над ней с частотой 1024 Гц, и вы можете услышать базовую ноту с той же нотой на октаву выше. Скрипачи часто используют свои знания о гармониках, и настройка связана с тем, как взаимодействуют базовые частоты и гармоники.

Тригонометрия обширно используется в медицине, ученые утверждают, что мозг оценивает расстояние до объектов, измеряя угол между плоскостью земли и плоскостью зрения. К тому же в биологии используется такое понятие как синус сонный, синус каротидный и венозный или пещеристый синус. Тригонометрия играет важную роль в медицине. С ее помощью иранские ученые открыли формулу сердца - комплексное алгебраически-тригонометрическое равенство, состоящее из 8 выражений, 32 коэффициентов и 33 основных параметров, включая несколько дополнительных для расчетов в случаях аритмии.

Биология также является наукой, которая использует тригонометрию в каких-либо открытиях и физических свойств. Биологические ритмы, биоритмы связаны с тригонометрией. Модель биоритмов можно построить с помощью графиков тригонометрических функций. Для этого необходимо ввести дату рождения человека (день, месяц, год) и длительность прогноза. Движение рыб в воде происходит по закону синуса или косинуса, если зафиксировать точку на хвосте, а потом рассмотреть траекторию движения. При полёте птицы траектория взмаха крыльев образует синусоиду.

В наше время большое внимание тригонометрии уделяет архитектура. Поскольку углы являются сложной частью природы, синусы, косинусы и касательные – это несколько тригонометрических функций, которые древние и современные архитекторы используют в своей работе. Конструкции должны быть не только прочными, но и соответствовать строительным нормам. Современные архитекторы, обладая высокоскоростными компьютерами и сложными средствами автоматизированного проектирования, используют всю мощь математики. Культовые здания во всем мире были спроектированы благодаря математике, которая может считаться гением архитектуры.

Тригонометрия внесла значительный вклад в множество наук. Большое количество известных и мало известных ученых использовали тригонометрию в своих открытиях, которые значительно облегчают нам жизнь в наше время.

Рисунок 26-Тригонометрия в природе

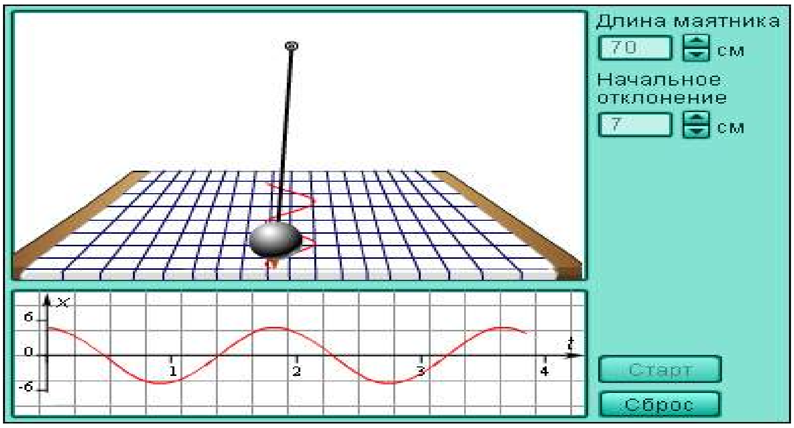


Рисунок 27- Тригонометрия в физике. Движение маятника

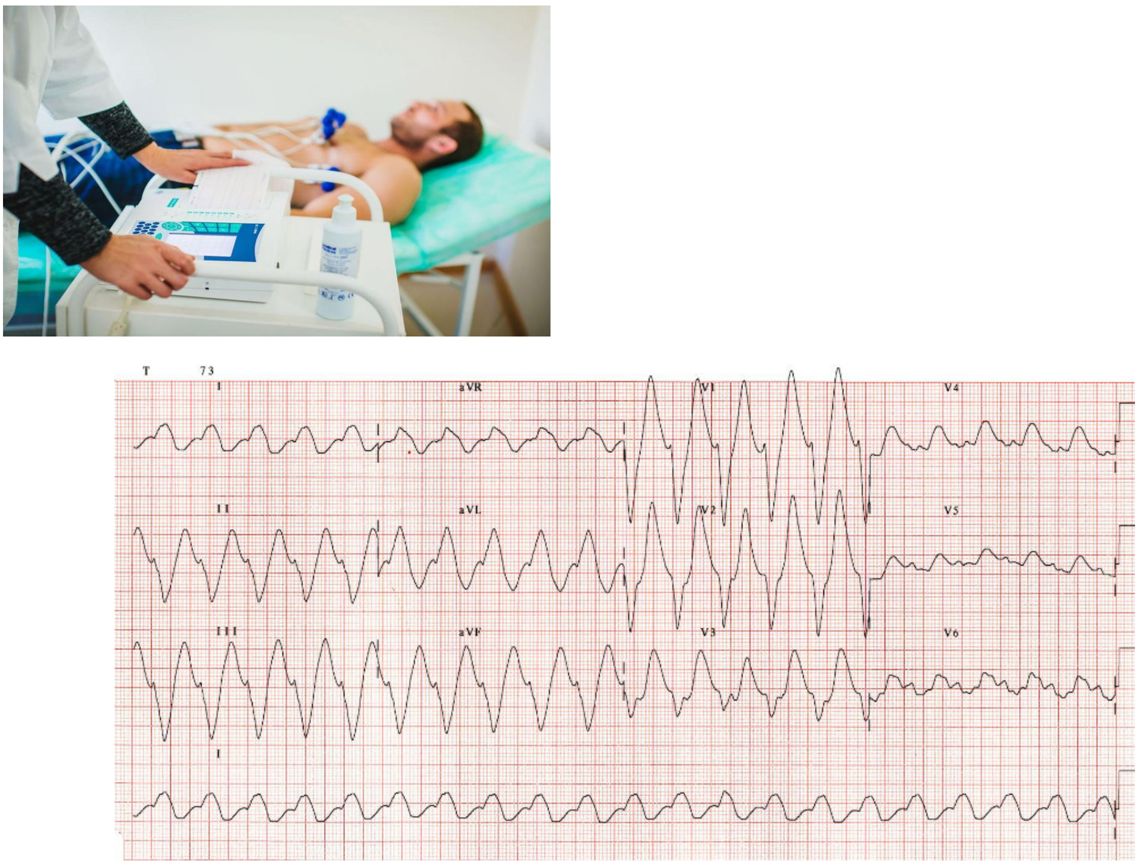
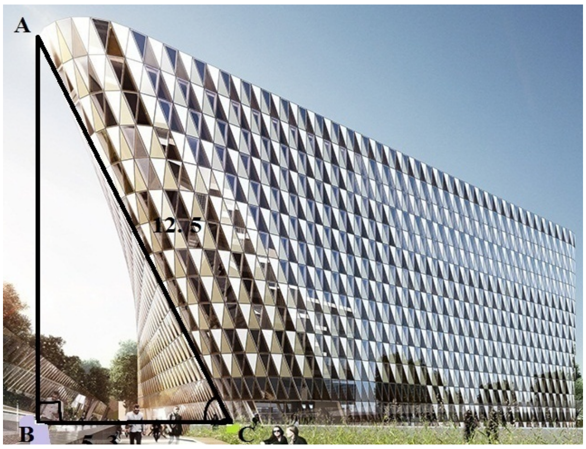


Рисунок 28–Тригонометрия в медицине. Электрокардиограмма сердца

2.3 Решение задач с использованием тригонометрических функций

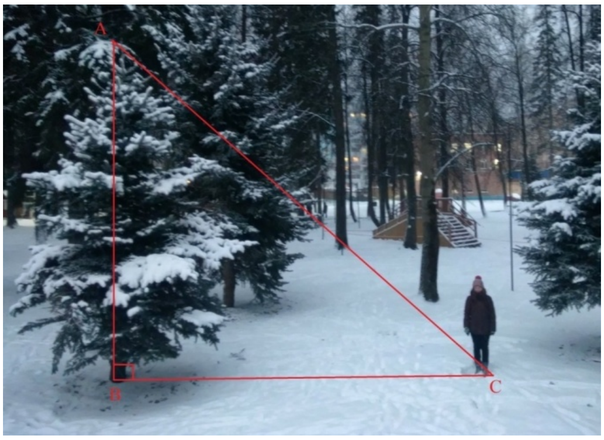
Задача1. Условие: Корпус AulaMedica Каролинского медицинского института в Швеции – довольно необычное здание. По форме оно напоминает треугольник с закругленными углами. Один из этих углов при рассмотрении больше похож на корму корабля. Здание корпуса института находится под наклоном. Необходимо определить по картинке, чему примерно равен угол наклона здания.

Решение:



AC≈ 12.5
BC≈ 5.3
cosLC = AC : BC
cosLC = 5.3 : 12.5
cosLC= 0.4240
LC≈ 64°54’

Задача2. Условие: Расстояние от человека до дерева – 6. 4 м. Необходимо найти высоту дерева и расстояние от верхушки до человека, если угол обзора человека равен 42°.



Дано:
BC = 6. 4 м, LC = 42°

Найти:
AB, AC
Решение:

1) tg α = AB : CB;

tg 42° = AB :6. 4
AB = 6.4 * tg 42°
AB = 6.4 * 0. 9004
AB ≈ 5. 76 м

2) cos α = BC : AC

cos 42° = 6.4 : AC
AC = 6. 4 : cos 42°
AC = 6.4 : 0. 7431
AC ≈ 8. 6

2.4 Практико-ориентированное задание. Расчет и анализ биоритмов

Хронобиология (от «Chrono» - «время») - наука, которая исследует периодические (циклические) феномены, протекающие у живых организмов во времени, и их адаптацию к солнечным и лунным ритмам. Эти циклы именуют биологические ритмы.

Синхронизация уровня и длительности биологической активности с внешними факторами у живых организмов происходят при многих существенных биологических процессах. Это происходиту животных (еда, сон, спаривание, зимовка, миграция, клеточная регенерация, и т. д.), у растений (движения листа, фотосинтез и т. д.).

Наиболее важный ритм в хронобиологии - суточный ритм, примерно 24-часовой цикл физиологических процессов у растений и животных.

Есть и другие важные циклы:

‒инфрадианные, более долгосрочные, такие как ежегодные циклы миграции или воспроизводства, выявленные у некоторых животных, или человеческий менструальный цикл.

–ультрадианные ритмы, краткие циклы, такие как 90-минутный цикл REM-сна у людей, 4-часовой назальный цикл или 3-часовой цикл продуцирования гормона роста.

Биоритмы обнаружены на всех уровнях организации живой природы. Биоритмика - одно из наиболее общих свойств живых систем.

Биоритмы признаны важнейшим механизмом регуляции функций организма, обеспечивающим гомеостаз, динамическое равновесие и процессы адаптации в биологических системах.

Биоритмы, с одной стороны, имеют эндогенную природу и генетическую регуляцию, с другой, их осуществление тесно связано с модифицирующим фактором внешней среды, так называемых датчиков времени. Эта связь в основе единства организма со средой во многом определяет экологические закономерности. Обнаружены биоритмы чувствительности организмов к действию факторов химической и физической природы.

Хронофармакология - способы применения лекарств с учетом зависимости их действия от фаз биологических ритмов функционирования организма и от состояния его временной организации, изменяющейся при развитии болезни.

Закономерности биоритмов учитывают при профилактике, диагностике и лечении заболеваний.

Изучением того, какое место в жизни человека занимают циклические периоды, занимались Гиппократ и Авиценна. Эти великие ученые создали научные труды, содержащие информацию о возможности грамотного чередования положительных и отрицательных фаз. Именно такой режим, по их мнению, и образует здоровый образ жизни человека. Современная биоритмология возникла благодаря деятельности профессора Франца Халберга. Также изучением биоритмов занимались российские ученые Иван Петрович Павлов, Владимир Иванович Вернадский и Иван Михайлович Сеченов.

Теории «Трех биоритмов» около ста лет. Её авторы: Герман Свобода, Вильгельм Флисс, Фридрих Тельчер.

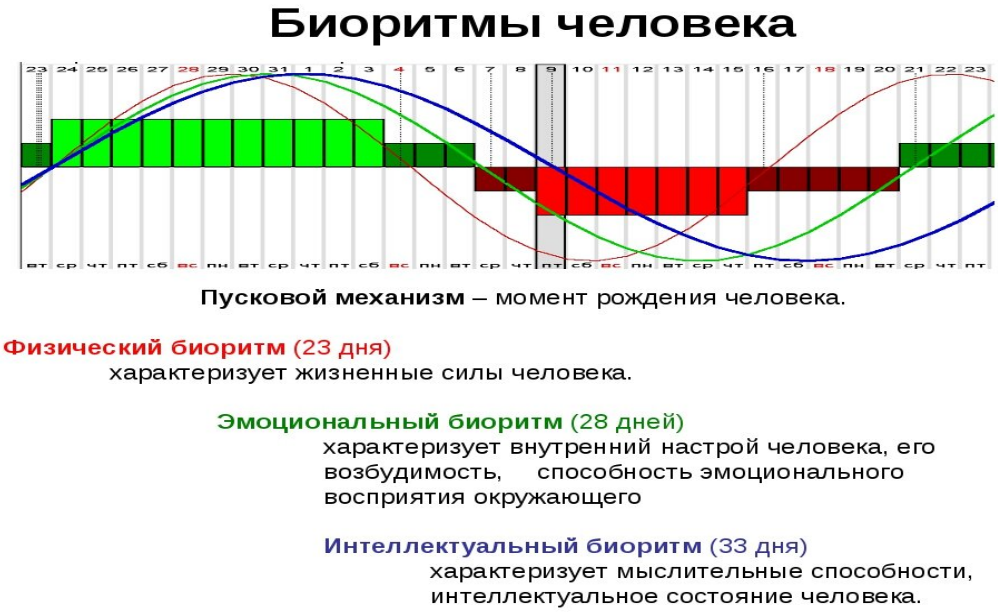


Рисунок 29- График биоритмов человека

Биоритмы рождаются вместе с человеком, одновременно стартуя, они оказывают влияние на наш жизненный путь – человек совершает те, или иные поступки с различной степенью успешности. Нестабильность биологических процессов объясняется нестабильностью самих жизненных циклов.Любой цикл состоит из 2х полупериодов – положительного и отрицательного.

Физический биоритм – регулирует физическую активность и характеризует жизненные силы человека, т.е. его физическое состояние, энергию, силу, выносливость. Периодичность ритма составляет 23 дня. В течение первой половины физического цикла человек энергичен, и достигает лучших результатов в своей деятельности (вторая половина – энергичность уступает лености).

Эмоциональный ритм –характеризует состояние нервной системы, настроение. Продолжительность периода эмоционального цикла равна 28 дням. В периоды его активности повышается чувствительность, улучшается настроение. Человек становится возбудимым к различным внешним катаклизмам. Если у него хорошее настроение, он строит воздушные замки, мечтает влюбиться и влюбляется. При снижении эмоционального биоритма происходит упадок душевных сил, пропадает желание, радостное настроение.

Интеллектуальный биоритм- определяет мыслительные способности, способность обрабатывать информацию. Цикличность его – 33 дня. Он распоряжается памятью, способностью к обучению, логическому мышлению.

В фазе активности наблюдается подъем, а во второй фазе спад творческой активности, отсутствуют удача и успех.Заначало отсчета всех трех биоритмов берется день рождения человека. Очевидно, что момент появления на свет очень труден для него, ведь ребенок, появляясь на свет, меняет водную среду на воздушную. Происходит глобальная перестройка всего организма. С точки зрения биологии достаточно правдоподобно, что все три биоритма в этот день пересекают ось абсцисс.

Практическое задание «Моделирование биоритмов человека»

Задача. Построить кривые своих биоритмов на ноябрь и декабрь месяц текущего года. Сравнить графики ноября и декабря. На основе анализа индивидуальных биоритмов прогнозировать благоприятные и неблагоприятные дни для разного рода деятельности.

Любой человек имеет *управляемые параметры*:

- Дата рождения;
- День отсчета;
- Длительность прогноза.

имеет *неуправляемые параметры (константы)*:

- Период физического цикла: 23 дня;
- Период эмоционального цикла: 28 дней;
- Период интеллектуального цикла: 33 дня.

Математическая модель

Расчетные формулы:

A. $R\text{ф}(x) = \sin[(2\pi\, x)/23]$ – физический цикл;

B. $R\text{э}(x) = \sin[(2\pi\, x)/28]$ – эмоциональный цикл;

C. $R\text{и}(x) = \sin[(2\pi\, x)/33]$ – интеллектуальный цикл.

Компьютерная модель. Для моделирования используем среду электронной таблицы, в которой информационная и математическая модели объединяются в таблицу, которая имеет две области:

- исходные данные – константы и управляемые параметры;
- расчетные данные (результаты).

Откроем заготовку файла **bioritm.xls**

Введем исходные данные:

Дата рождения – (вводим в формате ДД.ММ.ГГГГ)

Дата начала прогноза – (вводим в формате ДД.ММ.ГГГГ)

Вычисление биоритмов:

Ячейка **B9=C5;** маркером автозаполнения растягиваем до **30** дней.

Заполняем физический биоритм: **=SIN(2*ПИ()*(B9-C4)/23),**

Рассчитываем эмоциональный биоритм: **=SIN(2*ПИ()*(B9-C4)/28),**

Интеллектуальный биоритм: **=SIN(2*ПИ()*(B9-C4)/33),**

Строим график:

- Выделим диапазон для графика**: значения всех трех биоритмов**
- Мастер диаграмм.
- Тип диаграммы – график с маркерами.
- На втором шаге построения диаграммы выберите :

Вкладку «Ряд», для «Подписей по оси Х» выберите столбец **A9-A38**

Анализ полученных биоритмов:

- Сравните результаты входного тестирования с полученными данными, сделайте вывод «Соответствует ли теория практике?»
- Выберите «неблагоприятные» дни.
- Проверьте свое настроение, когда на вашем графике показатели эмоционального биоритма находятся на спаде или на подъеме.

В каждом из трех циклов первая половина является благоприятной для человека, вторая – неблагоприятной. Пересечение же графика с осью абсцисс считается критической точкой, в такие критические дни человек может ожидать для себя наибольших опасностей. Необязательно считать, что должно произойти несчастье, просто в этот день нужно быть начеку, так как ваши физические, интеллектуальные или эмоциональные возможности снижены.

БИОРИТМЫ

Исходные данные:	
Дата рождения	12.01.1994
Дата начала прогноза	21.10.2024
Длительность прогноза	30

№	Порядковый день	Физический	Эмоциональный	Интеллектуальный
1	21.10.2024	-0,942260922	0,433883739	-0,618158986
2	22.10.2024	-0,997668769	0,222520934	-0,755749574
3	23.10.2024	-0,979084088	-9,70198E-14	-0,866025404
4	24.10.2024	-0,887885218	-0,222520934	-0,945000819
5	25.10.2024	-0,730835964	-0,433883739	-0,989821442
6	26.10.2024	-0,51958395	-0,623489802	-0,998867339
7	27.10.2024	-0,269796771	-0,781831482	-0,971811568
8	28.10.2024	1,43081E-13	-0,900968868	-0,909631995
9	29.10.2024	0,269796771	-0,974927912	-0,814575952
10	30.10.2024	0,51958395	-1	-0,690079011
11	31.10.2024	0,730835964	-0,974927912	-0,540640817
12	01.11.2024	0,887885218	-0,900968868	-0,371662456
13	02.11.2024	0,979084088	-0,781831482	-0,189251244
14	03.11.2024	0,997668769	-0,623489802	1,50924E-13
15	04.11.2024	0,942260922	-0,433883739	0,189251244
16	05.11.2024	0,816969893	-0,222520934	0,371662456
17	06.11.2024	0,631087944	-2,74477E-14	0,540640817
18	07.11.2024	0,39840109	0,222520934	0,690079011
19	08.11.2024	0,136166649	0,433883739	0,814575952
20	09.11.2024	-0,136166649	0,623489802	0,909631995
21	10.11.2024	-0,39840109	0,781831482	0,971811568
22	11.11.2024	-0,631087944	0,900968868	0,998867339
23	12.11.2024	-0,816969893	0,974927912	0,989821442
24	13.11.2024	-0,942260922	1	0,945000819
25	14.11.2024	-0,997668769	0,974927912	0,866025404
26	15.11.2024	-0,979084088	0,900968868	0,755749574
27	16.11.2024	-0,887885218	0,781831482	0,618158986
28	17.11.2024	-0,730835964	0,623489802	0,458226522
29	18.11.2024	-0,51958395	0,433883739	0,281732557
30	19.11.2024	-0,269796771	0,222520934	0,095056043

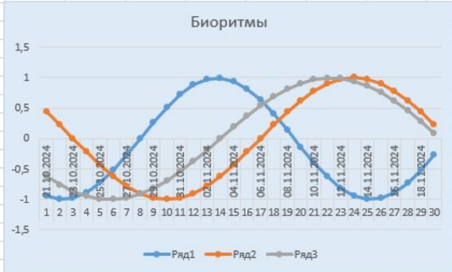


Диаграмма1 Диаграмма2 Лист1

Готово

Рисунок 30-Расчет и анализ биоритмов

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы обучающегося

В рамках программы ОУП. 03 Математика обучающимися осваиваются личностные, метапредметные и предметные результаты в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования: личностные (ЛР), метапредметные (МР), предметные для углубленного уровня изучения (ПР б + Пр у):

Личностные результаты воспитания (ЛР ВР)	
ЛР ВР 1	Осознающий себя гражданином и защитником великой страны
ЛР ВР 2.1	Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости
ЛР ВР 15	Стремящийся к саморазвитию и самосовершенствованию, мотивированный к обучению, к социальной и профессиональной мобильности на основе выстраивания жизненной и профессиональной траектории.
Предметные результаты углубленный уровень (ПР б + ПР у)	
ПРб 03	владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
ПРб 04	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
ПРб 05	сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа

Критериями оценивания результатов самостоятельной работы обучающегося являются:

- уровень усвоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность ключевых (общеучебных) компетенций;
- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы.

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатамвыполнения самостоятельной работы производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности образовательных достижений (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Контрольные вопросы

1. Какие функции называются тригонометрическими?

2.Дайте определение: а) синуса; б) косинуса; в) тангенса; г) котангенса любого угла.

3. Какие знаки в координатных четвертях имеют функции:

а) sinx; б) cosx; в) tgx; г) ctgx.

4. Какие тригонометрические функции являются: а) четными; б) нечётными?

5. Какие наименьшие положительные периоды имеют функции:

а) sinx; б) cosx; в) tgx;) ctgx.

6. Какова область определение функции: а) sinx; б) cosx; в) tgx; г) ctgx.

7. Какова область значения функции: а) sinx; б) cosx; в) tgx; г) ctgx.

8. Перечислите способы задания функции.

9.Дайте определение графика функции.

10. Перечислите основные типы преобразования графиков функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. 12-е изд. - М.: Просвещение, 2024. - 464 с.

2. Атанасян Л.С. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 -11-й классы: базовый и углубленный уровни:/ учебник/-12-е изд., стер.- Москва: Просвещение,2024.-287с.

3. Башмаков М.И. Математика: учебник для студентов учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков. — 5-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2025. — 288 с

Интернет-ресурсы по математике:

1. Математика в Открытом колледже, http://www.mathematics.ru
2. Math.ru: Математика и образование, htpp:\\www.math.ru
3. Allmath.ru—вся математика в одном месте, http:\\www.allmath.ru
4. Exponenta.ru: образовательный математический сайт, http:\\www.exponenta.ru
5. Интернет-проект «Задачи», http:\\www.problems.ru
6. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line), http:\\www.mathtest.ru

Приложение 1

Преемственность образовательных результатов ФГОС СОО (предметных) с образовательными результатами ФГОС СПО

(профессионально-ориентированная взаимосвязь общеобразовательного предмета с профессией/специальностью)

Наименование общепрофессиональных дисциплин с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР	Наименование профессиональных модулей (МДК) с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР	Наименование предметных результатов ФГОС СОО, имеющих взаимосвязь с ОР ФГОС СПО	Наименование разделов/тем и рабочей программе по предмету
ОП.01 Анатомия и физиология человека уметь: - применять знания о строении и функциях органов и систем организма человека при оказании сестринской помощи и сестринского ухода за пациентами. знать: - строение человеческого тела и функциональные системы человека, их регуляция и саморегуляция при взаимодействии с внешней средой. - основная медицинская терминология; -строение, местоположение и функции органов тела человека; -физиологические характеристики основных процессов жизнедеятельности организма человека; -функциональные системы человека, их регуляцию и саморегуляцию при взаимодействии с внешней средой.	**МДК.03.01 Здоровый образ жизни и профилактика заболеваний в разные возрастные периоды** **МДК.03.02 Сестринское дело в системе первичной медико-санитарной помощи** <u>иметь практический опыт:</u> -проведения мероприятий по санитарно-гигиеническому просвещению населения; -выполнения работ по проведению профилактических медицинских осмотров населения; -проведения санитарно-противоэпидемических мероприятий по профилактике инфекционных заболеваний; -выполнения работы по проведению иммунопрофилактики инфекционных заболеваний в соответствии с	ПРб 02 сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; ПРб 03 владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; ПРб 05 сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического	Тема «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

Наименование общепрофессиональных дисциплин с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР	**Наименование профессиональных модулей (МДК) с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР**	**Наименование предметных результатов ФГОС СОО, имеющих взаимосвязь с ОР ФГОС СПО**	**Наименование разделов/тем и рабочей программе по предмету**
	национальным календарем профилактических прививок и по эпидемическим показаниям уметь: -проводить индивидуальное (групповое) профилактическое консультирование населения о факторах, способствующих сохранению здоровья, факторах риска для здоровья и мерах профилактики предотвратимых болезней; -проводить работу по организации и проведению санитарно-противоэпидемических (профилактических) и ограничительных (карантинных) мероприятий при выявлении инфекционных заболеваний; проводить осмотр лиц и динамическое наблюдение за лицами, контактными с пациентам, заболевшими инфекционным заболеванием; использовать вакцины в соответствии с установленными	анализа; ПРб 07 сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; ПРб 08 владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить	

Наименование общепрофессиональных дисциплин с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР	Наименование профессиональных модулей (МДК) с образовательными результатами, имеющими взаимосвязь с предметными ОР	Наименование предметных результатов ФГОС СОО, имеющих взаимосвязь с ОР ФГОС СПО	Наименование разделов/тем и рабочей программе по предмету
	правилами знать: -информационные технологии, организационные формы, методы и средства санитарного просвещения населения; правила проведения индивидуального и группового профилактического консультирования, современные научно обоснованные рекомендации по вопросам личной гигиены, рационального питания, планирования семьи, здорового образа жизни, факторов риска для здоровья	нестандартные способы решения задач;	